非可換幾何としての変形量子化と、非可換ゲージ理論(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):
浅川, 嗣彦

学位申請論文

浅川　嗣彦

主論文１

非可換幾何としての変形量子化と、非可換ゲージ理論

浅川　嗣彦

概 要

弦理論に現れる非可換空間の拡張として、変形量子化の手法を非可換変形として再解釈することにより非可換空間を定義し、更にその非可換空間上のゲージ理論を構成した。非可換空間の記述には、Fedosov による任意の symplectic 多様体上の変形量子化の手法を用いた。それにより、Weyl bundle という代数束の平坦接続ごとに対応する非可換空間を定義することができる。更に、Weyl bundle 自身は無限次元のゲージ群を持ち、その一部が非可換ゲージ群であることも結論できる。これにより、様々な非可換空間とその上の非可換ゲージ理論の両者が共に、普遍的な Weyl bundle のゲージ理論に埋め込まれているという描像が得られた。

目 次

第1章　Introduction

近年、広い意味の弦理論の背後には非可換幾何がある、という認識が徐々に成されつつある。

その最初の兆候は Witten の open string field theory に見られる [5]。これは、点粒子を第二量子化した場の理論に対応して、string を第二量子化した場の理論である。点粒子の場合は、大まかに言うと場とは時空上の関数であるから、相互作用を表す場の間の積は可換な関数代数を成している。一方、向き付けられた2つの string の相互作用は一般に非可換である。従って、この string field theory では場の積は非可換で結合的な積で記述されている。非可換な結合代数とは正に非可換幾何であるから、点粒子から string にしたことで何らかの非可換幾何が現れると考えることができるわけである。しかし、これはいわゆる時空の非可換性ではないため、非可換幾何としてシリアスに捉える人は少なかったように思われる。

次の例は D-brane と行列模型である。D-brane は open string の端点を束縛する高次元膜であるが、それが N 枚重なると端点の自由度は $N\times N$ の $U(N)$ 行列になることが知られている。この性質はまた、行列によって string 理論を定式化しようという行列模型にも本質的に効いている。これらは D-brane が重なった方向の string 座標が、行列代数という非可換幾何の上の座標になることを意味している。しかしこれも、非可換性というよりは行列性であり、D-brane 上のゲージ場が $U(1)$ から $U(N)$ になったという扱いで十分だった。

これに対し、行列模型において D-brane の張る方向に非可換性が現れる例が見出された [6]。行列模型のトーラスコンパクト化を考えると、座標が行列であるため、コンパクト化にも通常と異なる可能性、即ち非可換トーラスを考えることが可能である。これが原因で、得られる理論は非可換トーラス上の Yang-Mills 理論で記述されることになる。また物理的には、この非可換性はコンスタントな C 場が背景にあることと同定された [7]。この例は D-brane の広がり自体が非可換な空間と見なされるため、非可換幾何としてシリアスに捉えられた。そしてこれが元祖となり、この流れに沿って行列模型や open string の非可換性についての様々な研究が成されてきた。

そして、それらの成果を総合し、コンスタントな NSNS B 場が背景にあるときの open string 理論において、D-brane の有効理論が非可換空間上の場の理論になることが一昨年 [8] により指摘された。これは [6] と同じ現象が string 理論で、しかもコンパクト化をしなくても起こることを意味している。ここで B 場は D-brane 上の場の積を、可換な通常の積からいわゆる Moyal-Weyl 積という非可換な積に変化させる役割をしている。このような Moyal-Weyl 積を持つ非可換空間の上のゲージ理論は、最近では一般に noncommutative gauge theory（非可換ゲージ理論[1]）と呼ばれている。

[1]紛らわしいが、non-Abelian のことではない。

しかし、より一般の背景、つまり、曲がった空間でかつコンスタントではない B 場が背景にあるときの D-brane 有効理論については、球面の場合などの例を除いて、ほとんどわかっていないのが現状である。もちろんそれは、string 理論自体がこの場合にはよくわかっていないからである。それでも、このような場合にも何らかの非可換幾何が現れると考えるのは自然である。そこで、逆に非可換性を頼りに、D-brane 有効理論の方をより一般の非可換ゲージ理論に拡張するということが考えられる。その基本的なアイデアは以下の通りである。

「Moyal-Weyl 積というのは元々、古典力学において位相空間が Euclid 空間 $\mathbb{R}^{2n}$ の場合の変形量子化で現れたものである。その後、変形量子化は任意の Poisson 多様体に拡張された。その場合には、一般に $*$ 積と呼ばれる非可換積が得られる。そこで、この $*$ 積を時空の非可換性と再解釈することで、Moyal 積のように単純な非可換ゲージ理論を、より一般の非可換ゲージ理論に拡張することができる。」

このアイデア自体は既に [6] にも言及されており、これまでに関連したいくつかのアプローチもなされている [9]。しかし現状ではアイデア以上の具体的な議論までは至っておらず、特にゲージ理論をこの枠内でどう捉えるかについては全く考えられてこなかった。そこで、我々は [1] において、$*$ 積を持つ非可換空間の上のゲージ理論（非可換ゲージ理論）についての一般論を考察した。本稿はその内容についての報告である。その方針としてはあまり string 理論には拘らず、純粋に可換な空間上の場の理論の非可換空間への拡張を目標とした。それは string 理論に限らず、一般に量子的論的な時空は非可換幾何で記述できるのではないかという希望的観測もあるからである。我々は具体的には、symplectic 多様体を古典的時空とするような場合を考え、その多様体上に $*$ 積を導入して出来る非可換空間上で、ゲージ理論がどう定義されるかを考察した。それは symplectic 多様体の場合には、Fedosov による幾何学的にその構造が簡明な変形量子化の方法が知られているためである。我々はその特徴を最大限に用いて議論を進める。

本稿の内容の概略と構成は以下の通りである。

まず第 2 章では、§2.1 で非可換幾何の基本的な思想を概観した後、§2.2 で変形量子化の定義をし、その非可換幾何としての解釈について説明する。次に §2.3 では、任意の symplectic 多様体 M 上の $*$ 積を得る方法として Fedosov による変形量子化の手法 [3] を紹介する。その基本的な処方は以下の通りである。多様体 M の tangent bundle TM の各 fiber は Euclid 空間であるため、Moyal-Weyl 積の入った Weyl 代数に変形することができる。それらを束ねた fiber bundle (Weyl bundle $\mathcal{W}$) を考え、その上の一般の connection $\mathcal{D}$ のうち、Abelian connection D と呼ばれる一種の定曲率の connection で fiber 同士のつながり方を指定する。このとき、D に関して flat な section 全体 $\mathcal{W}_D$ が多様体の関数空間 $C^\infty(M)[[\hbar]]$ と一対一に対応しているため、flat section の間の fiberwise な Moyal 積を通して関数空間の $*$ 積が大域的に定義されるという構造になっている。またこの処方は、出発点の TM を拡張してゲージバンドルの構造を含むものにも適用できる。（これは複数枚の重なった D-brane を想定していることに対応する。）それらの拡張については §2.4 で議論する。この拡張を行ったものが後の章で非可換ゲージ理論になる代数である。

第 3 章では、主にゲージ変換の考察から非可換ゲージ変換やそれに付随する非可換ゲージ場を与える。まず §3.1 で、この Weyl bundle $\mathcal{W}$ の自己同型写像全体を詳しく調べる。その結果、fiberwise な自己同型写像が無限次元のゲージ変換として理解できることがわかる。そして上述の一般の connection $\mathcal{D}$ が正にこのゲージ

変換に対応するゲージ場であり、このゲージ場の特別な配位として Abelian connection D があることになる。また、この変換が二つの異なる flat sections の空間の間の同型対応を導くことも示すことができる。これは、異なる $*$ 積を持つ関数空間同士が互いにゲージ変換で移り合うことを意味している。このような Weyl bundle のゲージ変換全体の中で特に、一つの flat section の空間 W_D を保つゲージ変換、つまり $*$ 積を保存するようなゲージ変換が、非可換ゲージ変換であることが結論できる。

従って、これに対応する非可換ゲージ場は、一般のゲージ場の適当な制限によって得られることになる。§3.2 では、その制限は、一般の connection $\mathcal{D}$ が W_D（の微分代数的拡張）の上の garaded derivation であれという条件で表現される。§3.3 では具体的にその条件を満たす非可換ゲージ場を構成する。実際、局所的には、変形した Darboux 座標を用いた表示で、良く知られた形の非可換ゲージ変換性をこの非可換ゲージ場が持つことがわかる。またこの表示で、Weyl bundle のゲージ場の場の強さが、非可換ゲージ場の場の強さと、非可換性を決める背景場の組み合わせで表されることもわかる。これは、D-brane 有効作用である Dirac-Born-Infeld 作用に典型的に現れる組み合わせと良く対応している。

以上まとめると、$*$ 積という非可換性と、その積が入った関数空間の上で定義される非可換ゲージ場の両者が共に、Weyl bundle のゲージ理論の自由度として統一されているという描像が得られることが結論できる。

第 4 章では多少応用的な事柄を議論する。まず §4.1 で、Fedosov の $*$ 積の具体例を挙げる。これは非常に簡単な場合であるが、それでもいくつか物理的な示唆が得られる。次に §4.2 で、我々の非可換ゲージ理論の議論の直接的な結果として、ゲージ同値性の起源を説明する。Moyal-Weyl 積の非可換ゲージ理論の場合、それと等価な可換なゲージ理論があることが指摘されているが、そこで両者のゲージ場の関係をつけるために仮定されたのがゲージ同値性である。我々の観点からは、それは単に異なる $*$ 積を持つ関数空間における非可換ゲージ場の関係、即ち Weyl bundle のゲージ変換に過ぎないことがわかる。我々が指摘したゲージ場の関係の不定性 [2] も同様に、Weyl bundle のゲージ変換の非可換性に他ならない。

最後に、第 5 章で結果をまとめ、今後の課題を議論する。

第2章　非可換幾何としての変形量子化

この章では、変形量子化を非可換幾何として解釈するとはどういうことかを説明する。そして、変形量子化により得られる $*$ 積の具体的な構成を行う。更に、変形量子化を少し拡張したときの非可換幾何的な対応物を最終的に求める。これが非可換ゲージ理論の代数である。

2.1　非可換幾何のコンセプト

非可換幾何学を定義し展開する際には、常に可換な通常の幾何学とのアナロジーが基になっている。その出発点となるのが可換な幾何における Gel'fant-Naimark の定理である。

定理 2.1　局所コンパクト　ハウスドルフ空間の全体とそれらの間の proper な連続写像の成すカテゴリーと、可換 C^* 環とその $*$-homomorphism の成すカテゴリーとはカテゴリー同値である。

局所コンパクト　ハウスドルフ空間 X 上の（無限遠で消える）連続関数の成す環 $C_0(X)$ は自然に可換 C^* 環になる。従ってこの定理は、任意の可換 C^* 環 A は必ずある空間 X 上の関数環と見なすことができるということを述べている。更に噛み砕いて言えば、多様体 M の（位相構造に関する）幾何学的情報は、その上の連続関数環 $C(M)$ を調べれば全て解ることを意味している。例えば、M の各点には $C(M)$ の極大イデアルが対応し、M の閉部分集合には、その上で 0 になる関数全体の成す閉イデアルが対応している。非可換幾何学の基本的なアイデアは、この空間と代数の対応を逆に用い、代数の方から幾何を定義するということにある [10]。即ち、可換という性質だけを外した一般の C^* 環も何らかの空間と対応していると考えるわけである。それは一般に通常の点集合からなる空間ではなく直感的に理解するのは難しいが、代数の方では定義されているため、その幾何学的な性質を代数を通して調べることができる。

特に我々が通常用いるような、滑らかな微分可能多様体 M の情報は、代数のサイドでは滑らかな関数の全体 $C^\infty(M)$ に対応している。$C^\infty(M)$ は沢山の derivation、つまり M 上のベクトル場を持つ点が $C(M)$ と異なり、それが M の微分構造の情報を代数的に表現している。よって非可換幾何における微分可能構造も、環 A の derivation の成す Lie 代数の情報に込められていると考えることができる。これを更に進めて、微分形式の代数の非可換版 $\Omega(A)$ を A から（形式的に）構成することもできる。また、多様体上の積分は、非可換幾何では代数のトレースに置き換わる。

更に、場の理論を考えるには多様体 M 上のベクトルバンドルが必要である。Serre-Swan の定理により、有限 rank の滑らかな複素ベクトルバンドル E はその滑らかな section 全体 $C^\infty(M,E)$ に置き換えることができる。即ち、$C^\infty(M,E)$ は環 $C^\infty(M)$ 上の finite projective module（有限射影加群）であり、対応 $E \to C^\infty(M,E)$

はベクトルバンドルと $C^\infty(M)$ 加群のカテゴリー同値を与えている。従って、ベクトルバンドルの代数的な対応物が $C^\infty(M)$ 有限射影加群であることから、非可換幾何におけるベクトルバンドルに相当する概念は、環 A 上の有限射影加群と考えられる。また、微分形式の代数が定義されていれば、ベクトルバンドル上の connection に対応した加群上の conneciton も自然に定義される。

このように、非可換空間やその上の場の理論を考えるとき、それを数学的に記述する言葉は整備されてきている。しかし、実際に扱われている具体例は今のところ非可換な平面、トーラス、球面ぐらいしかない。また、環 A に対して微分構造 $\Omega(A)$ を与えるやり方はいろいろ提唱されているが [10]、未だ定まったものは無いのが現状である。これに対し、変形量子化を非可換幾何として解釈することにより、これまで以上の具体例を扱うことができることをこれから見ていく。本稿では、上の話のうち、特に環と空間の対応だけを指導原理にして議論を進める。

2.2 変形量子化

一般に、Poisson 多様体 $(M,\{,\})$ の変形量子化は次の様に定義される [11]。

定義 2.2 $Z=C^\infty(M)[[\hbar]]$ を、変形のパラメーター $\hbar$ による $C^\infty(M)$ 係数の形式的べき級数で得られる線形空間とする。即ちその元は以下のように与えられる。

$$f=\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^k f_k \qquad f_k\in C^\infty(M) \tag{2.1}$$

(形式的) 変形量子化とは、以下の様な結合積を Z 上に導入することである。

$$f*g=\sum_{k=0}^{\infty}\hbar^k M_k(f,g) \tag{2.2}$$

ここで、M_k は local な双微分演算子で、$M_0(f,g)=fg,\ M_1(f,g)-M_1(g,f)=-i\{f,g\}$ を満たすものとする。

$\hbar$ はプランク定数に相当するパラメーターである。M_0 の条件は、$*$ 積が可換積の $\hbar$ による変形であることを意味している。よって $\hbar\to 0$ limit で元の可換環 $C^\infty(M)$ に戻る。また M_1 の条件は、$*$ 積に関する交換子が $[f,g]_*:=f*g-g*f=-i\hbar\{f,g\}+\cdots$ と展開されることを要請しているが、それは即ち、交換子が Poisson 環の変形であること、つまり量子力学の対応原理を意味している。もちろん一般に $*$ 積は非可換積 $f*g\neq g*f$ である。そして、この変形された関数代数 $Z=C^\infty(M)[[\hbar]]$ を量子力学の観測可能量の空間と見なすわけである[1]。

定義 2.3 二つの $*$ 積 $*_1$ と $*_2$ は、結合代数としての同型射 $T:(Z,*_1)\to(Z,*_2)$ が存在するとき同値であるという。ここで、T は微分演算子の形式的べき展開 $T=T_0+\hbar T_1+\cdots$ で与えられるものである。

同値な $*$ 積は見かけは異なるが内容は同じであり、座標変換の $\hbar$ 変形に対応するものである。なお、複素

[1] 記号 $[[\hbar]]$ は $\hbar$ に関して正のべきであることを意味する。

ではなく実関数代数を考えるときは $*$ 積の代数にもエルミート性の条件が付くが、ここではそれは考えないことにする。

例 2.4 n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ 中を運動する自由点粒子の古典的な相空間 $M=\mathbb{R}^{2n}$ を考える。その座標を x^i $(i=1\cdots 2n)$ とすると、この空間上には以下のような 2-form

$$\omega=\frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i\wedge dx^j \tag{2.3}$$

が存在する。M はベクトル空間であるから、ω は線形な座標変換により常に標準形に直すことができる。

$$\omega=-dx^i\wedge dx^{i+n}=dp_i\wedge dq^i,\qquad \omega_{ij}=J_{ij}:=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

この (q^i,p_i) を正準座標系と呼ぶ。この表式からわかるように、ω は closed 2-form $d\omega=0$ であり、その ω_{ij} は逆行列 ω^{ij} を持つので非退化である。従って M は symplectic 多様体である。更に ω^{ij} により Poisson 括弧が $\{f,g\}=\omega^{ij}\partial_i f\partial_j g$ と定義されるため、M は Poisson 多様体になっている。この時の変形量子化は

$$f(x)*g(x)=f(x)\exp\left(-\frac{i}{2}\hbar\omega^{ij}\overleftarrow{\partial_i}\overrightarrow{\partial_j}\right)g(x) \tag{2.5}$$

という $*$ 積で与えられる。これを Moyal-Weyl 積と呼ぶ。正準座標系では、$*$ 積の交換子 $[q^i,p_i]_*=i\hbar\delta^i_j$ は通常の正準量子化により得られる演算子 $\hat{q}$ と $\hat{p}$ の正準交換関係に一致している。また他の座標系での $*$ はこれと同値になる。従ってこの Moyal-Weyl 積の代数は、本質的に演算子 $\hat{q}$、$\hat{p}$ の正準交換関係の生成する代数を関数で表現したものになっている。

従ってこの例を見る限り、別に変形量子化でやらなくてもいいのではないかと思える。しかしひとたびこの $\mathbb{R}^n$ という配位空間を一般の曲がった配位空間 N に拡張すると、相空間は cotangent bundle $M=T^*N$ となる。この場合も、底空間の座標を q^i、fiber 座標を p_i とすると $\omega=dp_i\wedge dq^i$ という標準的な symplectic form を持つ。更に拡張して q と p の区別を無くしたものが一般の symplectic 多様体である。あるいは、局所的に標準的な symplectic form を持つ多様体と言っても良い。そして各局所によって rank の異なる symplectic form まで許したものが Poisson 多様体であると言える。ここまで相空間を拡張した場合、演算子による正準量子化よりも関数による変形量子化の方が概念的に見通しが良い。

では実際に Poisson 多様体の場合にこの様な性質を持つ $*$ 積を、つまり $k\geq 2$ の双微分演算子 M_k を具体的に作るにはどうしたらいいだろうか？ 任意の symplectic 多様体の場合は Darboux の定理により、局所的には例 2.4 と同様の正準座標系が取れることが示されている。よって、開被覆の各開集合ごとに Moyal-Weyl 積を与えておいて、それらを貼り合わせられれば、大域的な $*$ 積を得ることが出来る。つまり、問題は開集合の重なり部分での２つの Moyal-Weyl 積をどう整合させるかというチェックコホモロジー的な問題に帰着する。実際、任意の symplectic 多様体上に $*$ 積が存在すること、また非同値な $*$ 積を分類することは [11][12] により解かれていて、M の２次のコホモロジー $H^2(M)[[\hbar]]$ の特性類により分類されることがわかっている。しかし、局所的な非可換な関数代数を貼り合わせるのであるから、具体的な表式をこの方法で得ることは難しい。これ

に対し、Fedosov はもう少し徹底したやり方をした [3]。即ち、局所的な座標系を考えるのではなく、その一点への limit としての接空間を考え、まずここへ Moyal-Weyl 積を導入する。すると、貼り合わせというのは各点の上の fiber の貼り合わせ、つまり fiber bundle の connection により指定されることになる。但し、この場合は Moyal-Weyl 積は fiber 方向の双微分演算子で書かれた積であるから、すぐさま base M 上の $*$ 積にはなっていない。Fedosov はその connection として特定のものを持ってくると base 方向の双微分演算子で書かれた $*$ 積が得られることを示した（結局 de Rham cohomology 的な構成になっている。)。この方法の長所は、原理的にはあらゆる $*$ 積を具体的に計算できるばかりでなく、その幾何学的な構造が明確な点である。従って、この手法を我々の議論の道具として用いることにする。なお、変形量子化の問題は、最終的には Kontsevich が任意の Poisson 多様体の場合に解答を与えた [13]。また、その方法と topological な string 理論との関係が [14] により示唆されている。

上の定義から明らかなように、変形量子化とはパラメーター $\hbar$ による可換な通常の関数代数の非可換な代数への変形と見なすことができる。従って §2.1 の精神に従えば、得られた非可換代数は何らかの非可換空間を記述していることになる。但しその際、変形量子化とは異なり、$\hbar$ は非可換性のスケールと解釈される。もちろん定義から、この非可換空間は $\hbar \to 0$ limit で元の可換な空間に帰着するものであるから、非可換幾何の全体から見ると可換な幾何のごく近傍のみを扱うことになる。しかし物理的にまず興味があるのは、そのような古典的には可換な通常の幾何が成り立つような場合である。このように変形量子化を非可換幾何として解釈することにより、十分広いクラスの非可換空間を取り扱うことができるわけである。次節では、この $*$ 積の具体的な構成法として、Fedosov の手法を紹介する。

2.3 Fedosov の $*$ 積

この節では、Fedosov による任意の symplectic 多様体上の変形量子化 [3] について詳しく紹介する。ここで導入される主要な対象は Weyl bundle とその上の connection である。変形量子化の立場から言えばそれらは $*$ 積を構成するための人工的な概念に過ぎないが、非可換ゲージ理論の立場ではそれ自身が重要な意味を持つことになる。

2.3.1 The Formal Weyl Algebras Bundle

(M,ω) を次元が $2n$ の symplectic 多様体とする。§2.2 で述べたように、ω は非退化な 2-form で、M の各点 $x \in M$ での接空間 T_xM 上に symplectic structure を与えている。

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i \wedge dx^j, \qquad \omega(\partial_i, \partial_j) = \omega_{ij}$$

ここで、dx^i は M 上の cotangent bundle T^*M の local frame で 1-form の基底であり、∂_i はそれと dual な TM の基底を表す。ω が非退化なので、成分 ω_{ij} は逆行列を持つ。従って、各 T_xM は例 2.4 と同じく線形

symplectic 空間であるため、Moyal-Weyl 積を導入することが出来る。

定義 2.5 T_xM に付随する formal Weyl algebra W_x とは以下のような $\mathbb{C}$ 上の unital associative algebra である。まず、その元は形式的べき級数

$$a(y,\hbar) = \sum_{2k+p\geq 0, k\geq 0} \hbar^k \frac{1}{p!} a_{k,i_1\cdots i_p} y^{i_1}\cdots y^{i_p} \tag{2.6}$$

で与えられる。ここで、$\hbar$ は formal な変形のパラメーターで、$y=(y^1,\cdots,y^{2n})$ は T_xM の線形座標である。また、係数 $a_{k,i_1\cdots i_p}\in\mathbb{C}$ は $i_1,\cdots,i_p$ に関して対称である。次に、これらの元の間の積は Moyal-Weyl 積

$$\begin{aligned} a\circ b &:= a\exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^j}\right)b \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^n \omega^{i_1j_1}\cdots\omega^{i_nj_n}\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y^{i_n}}a\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y^{j_n}}b \end{aligned} \tag{2.7}$$

で定義される。

この積が associative（結合的）で、また T_xM の座標の取り方に依らないことは容易に確かめられる。更に、後の便利のために次数を以下のように定義しておく。

$$deg(\hbar)=2, \qquad deg(y^i)=1 \tag{2.8}$$

そうすると、式 (2.6) の各項は次数が $2k+p\geq 0$ であり、$\circ$ 積はこの次数を保存することがわかる[2]。

これら各代数 W_x を fiber として M の各点に生やすことにより、M 上の algebra bundle $W=\cup_{x\in M}W_x$ が得られる。これを formal Weyl algebras bundle（略して Weyl bundle）と呼ぶ。Weyl bundle の section（切断）$a: M\to W$ の局所的な表式は

$$a(x,y,\hbar) = \sum_{2k+p\geq 0, k\geq 0} \hbar^k \frac{1}{p!} a_{k,i_1\cdots i_p}(x) y^{i_1}\cdots y^{i_p} \tag{2.9}$$

となる。ここで、$\hbar$ と y^i は先程と同じであるが、$a_{k,i_1\cdots i_p}(x)$ は各点により値を変えうる対称テンソル場である。これら section の全体 $C^\infty(M,W)$ も fiberwise な $\circ$ 積を持つ associative algebra になっている。以下では bundle とその section の空間を区別せずに同じ記号 W で表す。

代数 W の center Z とは、$\circ$ 積に関して W の任意の元と可換な元の集合のことであるが、明らかにそれは y を含まない section 全体になる。それは我々の考えたい対象である定義 2.2 の $Z=C^\infty(M)[[\hbar]]$ に線形空間として一致する。W からこの Z への projection map σ を定義しておく。

$$\begin{aligned} \sigma \ &: \ W\to Z=C^\infty(M)[[\hbar]] \\ &\quad a\mapsto \sigma(a):=a|_{y=0} \end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで少し正確な言い方をしておこう。$S(T^*M)$ を $C^\infty(M,T^*M)$ の対称テンソル積全体から成る $C^\infty(M)$ 代数とする。即ち、$C^\infty(M)$ を係数環とする加群であってかつ $C^\infty(M)$ 上の対称テンソル積による可換積を持つ

[2]つまり、斉次元 a,b に対して $deg(a\circ b)=deg(a)+deg(b)$

テンソル代数である。これは TM 上の関数環（の多項式近似）と考えられるため、y^i の $C^\infty(M)$ 係数のべき級数全体を意味している[3]。この $S(T^*M)$ と $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ は共に $C^\infty(M)$ 代数であるから、$C^\infty(M)$ 上のテンソル積を用いると、W は $C^\infty(M)$ 加群として $W \simeq C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes S(T^*M)$ と書ける。従って、W はこの意味では $C^\infty(M)$ 加群 $S(T^*M)$ の可換環 $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ への係数拡大と見なすことができる。そしてこの係数環の $\hbar$ 変形に伴い、$S(T^*M)$ に非可換な $\circ$ 積を導入したものが、上で定義した Weyl bundle の section W である。よって W は $S(T^*M)$ の $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ 代数への非可換変形（つまり TM の fiber 方向に非可換変形した関数代数）と言える。また、σ はこの意味では $TM \to M$ なる通常の projection の非可換版である。しかし以後も特に断らない限り、係数環は $C^\infty(M)$ であり、テンソル積は $\otimes = \otimes_{C^\infty(M)}$ であるとする。

上で定義した次数 deg により、W は $\mathbb{Z}$-graded algebra になっている[4]。即ち、W は各次数 $l \in \mathbb{Z}$ の固有空間 $W^{(l)}$ に分解され、$W = \oplus_{l=0}^{\infty} W^{(l)}$、$W^{(l)} \circ W^{(m)} \subset W^{(l+m)}$ を満たしている。また、後の議論で有用になるので、k 次以上の固有空間の直和を $W_k := \oplus_{l=k}^{\infty} W^{(l)}$ と記す。すると、W には自然な filtration（フィルター構造）$W \supset W_1 \supset W_2 \supset \cdots$ があることがわかる[5]。

W に値を取る M 上の微分形式も同様に考えることができる。即ち、M 上の外積代数 $\wedge = \wedge(T^*M)$ を通常の微分形式としたとき、W とのテンソル積をとった bundle $W \otimes \wedge$ の section 全体、つまり、$C^\infty(M, W \otimes \wedge)$ を W 値微分形式の空間と定義する。その元の局所的な表式は

$$a(x, y, \hbar) = \sum_{2k+p \geq 0, k \geq 0} \hbar^k \sum_{q=0}^{2n} \frac{1}{p!q!} a_{k,i_1 \cdots i_p, j_1 \cdots j_q}(x) y^{i_1} \cdots y^{i_p} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \tag{2.11}$$

となる。ここで $a_{k,i_1 \cdots i_p, j_1 \cdots j_q}$ は $i_1 \cdots i_p$ に関して対称で $j_1 \cdots j_q$ に関して完全反対称なテンソル場である。これらの 2 つの form 間の結合積は、y^i に関する Moyal-Weyl 積と dx^j に関する wedge 積 $\wedge$ を合わせたもので与えられる。それをまとめて $\circ$ と書くことにする。これにより $C^\infty(M)[[\hbar]]$ 加群 $W \otimes \wedge$ は $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ 代数になっている。また、先程 W の $\mathbb{Z}$ grading を定義したが、今度は $W \otimes \wedge$ は $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-graded algebra になっている。即ち、微分形式としての rank により $W \otimes \wedge = \oplus_{q=0}^{2n} W \otimes \wedge^q$ と分解され、wedge 積を含む $\circ$ 積はこれを保つ。この $\mathbb{Z}$ grading を $deg_a(a) := |a| \in \mathbb{Z}$ と記す。斉次の form a は $deg(a) \in \mathbb{Z}$ と、微分形式としての rank $deg_a(a) := |a| \in \mathbb{Z}$ により分類され、$\circ$ 積はそれぞれの次数を保存する。従って、filtration $W \otimes \wedge \supset W_1 \otimes \wedge \supset W_2 \otimes \wedge \supset \cdots$ も上と同様に成り立つ。

この deg_a に関する graded commutator（次数付き交換子）を以下で定義する[6]。

$$[a, b] := a \circ b - (-1)^{|a||b|} b \circ a \tag{2.12}$$

任意の元 $a \in W \otimes \wedge$ に対し、$[a, \ ]$ は $W \otimes \wedge$ に graded derivation として作用する演算子と見なせることに注意する（これについては次の節で説明する）。$W \otimes \wedge$ の central form の全体はこの交換子を用いると

$$\wedge[[\hbar]] := Z \otimes \wedge = \{c \in W \otimes \wedge \mid [c, a] = 0, \forall a \in W \otimes \wedge\} \tag{2.13}$$

[3] y は $T_xM \to \mathbf{C}$ なる写像であるから T_x^*M の元である。
[4] 次数は非負であるので、正確には $\mathbb{N}$-graded であるが普通 $\mathbb{Z}$ と呼ぶのでそれに合わせた。
[5] 普通のフィルターは k 次以下の空間で定義するが、ここでは今の定義の方が便利である。
[6] deg_a の偶奇しか効かないので、$\mathbb{Z}_2$-graded commutator、つまり supercommutator と同じことである。

と表せる。つまり、y^i を含まない W 値微分形式の全体である。もちろん Z は $\hbar$ についてはあらゆるべきを含んでいる。上と同様に $Z\otimes\Lambda$ への projection を σ で記す。

2.3.2 Weyl bundle 上の Graded Derivation

ここでは、Weyl bundle の section の代数に作用する graded derivation と呼ばれる演算子について考察する。代数 $W\otimes\Lambda$ を $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間と見なし、その意味での $\mathbf{C}$ 線形写像 $\tau: W\otimes\Lambda\to W\otimes\Lambda$ を考えると[7]。その全体はベクトル空間となるが、更に、$W\otimes\Lambda$ の form に関する次数 deg_a と両立する $\mathbf{Z}$ grading を持つとする。即ち、$|\tau| = deg_a\tau\in\mathbf{Z}$ が定まっていて $\tau: W\otimes\Lambda^q\to W\otimes\Lambda^{q+|\tau|}$ ということである。$W\otimes\Lambda$ は代数なので更に $\circ$ 積を持つが、それに対する τ の性質として以下の要請をする。

定義 2.6 $W\otimes\Lambda$ に作用する $\mathbf{C}$ 線形写像 $\tau: W\otimes\Lambda\to W\otimes\Lambda$ が以下のような Leibnitz 則を満たすとき

$$\tau(a\circ b)=\tau(a)\circ b+(-)^{|\tau||a|}a\circ\tau(b) \tag{2.14}$$

τ を $W\otimes\Lambda$ の graded derivation という。更に、ある $a\in W\otimes\Lambda$ により $\tau=\frac{i}{\hbar}[a,\ ]$ と表されるとき、τ は inner graded derivation であるという。

次数 0 のときは単に derivation と呼ぶ。もちろんこの定義は $W\otimes\Lambda$ に限らず任意の代数についても同様である。$C^\infty(M)$ の場合には $\mathbf{Z}$ grading は無いので derivation のみ存在するが、可換積に関して Leibnitz 則を満たす演算と言えば良く知ったベクトル場 $X=X^\mu\partial_\mu$ が derivation の典型的な例である。その拡張として、$\mathbf{Z}$ grading を考慮して Leibnitz 則が成り立つものを graded derivation と呼ぶわけである。特に、上の定義による inner graded derivation に関しては、確かに任意の $a\in W\otimes\Lambda$ に対する演算子 $\tau=\frac{i}{\hbar}[a,\ ]$ は、$[a,b\circ c]=[a,b]\circ c+(-)^{|a||b|}b\circ[a,c]$ を満たし $|\tau|=|a|$ により次数は定まっているので graded derivation である。$C^\infty(M)$ などの可換代数の場合にはこのような inner graded derivation は無いことに注意する。また、a のうちの center 部分は交換子の中では 0 になるため演算子として効かないという不定性が常にあることにも注意する。

$W\otimes\Lambda$ の graded derivation として、具体的には以下の 2 種類が重要である。

任意の symplectic 多様体 M 上には tortion free で、かつ symplectic structure を保つような connection ∇ が常に存在する。これを symplectic connection と呼ぶ[8]。これは、Riemann 多様体の場合に、tortion free で metric を保つような Riemannian connection（Levi-Civita connection）が存在することに類似している。しかし、後者の場合はそのような connection 1-form（Christoffel symbol）は metric を用いて表されるが、symplectic connection は symplectic form では表されない独立な量であることに注意する[9]。

この connection は自然に Weyl bundle 上の connection と見なすことが出来る。その結果、∇ は $\mathbf{C}$ 線形写

[7]即ち $\tau(\alpha a+\beta b)=\alpha\tau(a)+\beta\tau(b)$, $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$, $a,b\in W\otimes\Lambda$ である。
[8]正確には tangent bundle TM の各 fiber の関係をつけるものなので、TM の connection である。
[9]それ故、固定した symplectic connection を持つ symplectic 多様体 (M,Ω_0,∇) のことを Fedosov 多様体と呼ぶ人もいる [15]。

像 $\nabla : W \otimes \wedge^q \to W \otimes \wedge^{q+1}$ で以下の性質

$$\nabla(a \circ b) = \nabla a \circ b + (-)^{|a|} a \circ \nabla b \tag{2.15}$$

を満たすので（次数 1 の）graded derivation である。これは ∇ が symplectic tensor を保つこと $\nabla_k \omega_{ij} = 0$ から直ちに従う。局所 Darboux 座標では ∇ は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\nabla a &= da - \sum_{2k+p\geq 0} \hbar^k \sum_{\forall i,j} \frac{1}{p!q!} \Gamma^m{}_{li} a_{k,i_1\cdots m\cdots i_p,j_1\cdots j_q} y^{i_1} \cdots y^{i_p} dx^l \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \\
&= da + \frac{i}{\hbar} [\Gamma, a] \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

ここで、$d = dx^\mu \partial_\mu$ は外微分である。また、1 行目の残りの項は a の各テンソルの足に conection $\Gamma^k{}_{ij}$ を作用させた通常の共変微分で、上では省略して i の足に対する作用のみ書いているが、もちろん j の足にも作用している。これは任意の局所座標で正しい。一方 2 行目は局所 Darboux 座標でのみ正しい表式であり、W 値の local connection 1-form $\Gamma := \frac{1}{2}\Gamma_{ijk} y^i y^j dx^k, (\Gamma_{ijk} := w_{il}\Gamma^l{}_{jk})$ を用いて表されている。注意すべきは、W 値に拡げたことで、交換子を用いた inner graded derivation となる点である。このことからも ∇ が graded derivation であることがすぐにわかる。なお、$\Gamma_{ijk} := w_{il}\Gamma^l{}_{jk}$ は局所 Darboux 座標系では i, j, k に関して完全対称である。また、任意の 2 つの symplectic connection の差 $\Delta\Gamma_{ijk}$ は完全対称なテンソルになる。

次の例は Fedosov の導入した 2 つの演算子 δ, δ^{-1} である。これらは局所的には以下のように定義される。

$$\delta a := dx^i \wedge \frac{\partial}{\partial y^i} a \qquad \delta^{-1} a := \begin{cases} \frac{1}{p+q} y^i I\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) a & (p+q>0) \\ 0 & (p+q=0) \end{cases} \tag{2.17}$$

ここで $I(\partial/\partial x^i)$ は interior product（内部積）を表し、p は a の中の y^i の数（$deg(a)$ ではないことに注意）で、$q = |a|$ である。δ は a の中の y^i を dx^i に置きかえる演算であるから、deg を 1 下げて deg_a を 1 上げる写像 $\delta : W_p \otimes \wedge^q \to W_{p-1} \otimes \wedge^{q+1}$ であり、fiber 方向の外微分とでも呼ぶべき演算である。一方、δ^{-1} は dx^i を y^i に置きかえる演算 $\delta^{-1} : W_p \otimes \wedge^q \to W_{p+1} \otimes \wedge^{q-1}$ で、複雑に見えるのは δ の逆演算となるよう規格化因子で割っているためである。実際、これらは、以下の性質を満たす。

補題 2.7　演算子 δ、δ^{-1} は局所座標系の取り方に依らない。また以下を満たす。

$$\begin{aligned}
&(\delta)^2 = (\delta^{-1})^2 = 0 \\
&\delta(a \circ b) = (\delta a) \circ b + (-)^{|a|} a \circ (\delta b) \\
&a = \delta\delta^{-1} a + \delta^{-1}\delta a \qquad \text{for} \quad a \in W \otimes \wedge^q \ \ (q \geq 1) \\
&a = \delta^{-1}\delta a + \sigma(a) \qquad \text{for} \quad a \in W
\end{aligned} \tag{2.18}$$

1 行目はこれらが differential であることを、2 行目は δ が graded derivation であることを意味している（但し δ^{-1} では成り立たない）。3 、4 行目は δ と δ^{-1} が互いに逆演算であるという Hodge-de Rham 分解に類似した性質を表している。但し δ^{-1} の定義 (2.17) を反映して、0-form だけが違う分解になる。以上は特に

δ が外微分に似た性質を持っていることを示しているが、外微分 d のように x 方向の微分ではなく、純粋に代数的な演算であることに注意しておく。そのため δ は inner derivation としても表せる。即ち、

$$\delta a = -\frac{i}{\hbar}[\omega_{ij} y^i dx^j, a] \tag{2.19}$$

最後に、∇ と δ の関係と、曲率についてまとめておく。

補題 2.8 任意の元 $a \in W \otimes \Lambda$ に対し以下が成り立つ。

$$\nabla\delta a + \delta\nabla a = 0$$
$$\nabla^2 a = \frac{i}{\hbar}[R, a] \qquad R := \frac{1}{4} R_{ijkl} y^i y^j dx^k dx^l \tag{2.20}$$

ここで、R_{ijkl} は symplectic connection の symplectic 曲率テンソルで、R はその W 値の曲率 2-form である。

2.3.3 Weyl Connection と Abelian Connection

上で導入した connection ∇ は、そもそも TM 上にあったものを Weyl bundle 上で見たというだけのもので、実際は TM の fiber 同士の繋がり方しか指定していない線形な connection である。言い換えると、∇ は y のべきも $\hbar$ のべきも変えない写像である。しかし、Weyl bundle の fiber 同士を一般に繋げようとすると、connection も y や $\hbar$ のべきを変えるような写像であるべきである。従って、与えられた symplectic connection ∇ から、$W \otimes \Lambda$ 上のより一般の非線型な connection D を以下のように定義する。

定義 2.9 Weyl bundle $W \otimes \Lambda$ 上の connection を $\mathbb{C}$ 線形写像 $D : W \otimes \Lambda^q \to W \otimes \Lambda^{q+1}$ で

$$Da = \nabla a + \frac{i}{\hbar}[\gamma, a] \tag{2.21}$$

という形のもので定義し、これを Weyl connection と呼ぶ。ここで、1-form γ は $W \otimes \Lambda$ の global section である。

D は 2 つの garded derivation ∇、$\frac{i}{\hbar}[\gamma,\ ]$ の和であるから、明らかに $\circ$ 積に関して（次数 1 の）garaded derivation になっている、つまり、$D(a \circ b) = Da \circ b + (-1)^{|a|} a \circ Db$ を満たす。逆に言えばこれは、D が graded derivation になるべし、という要請をおいてその形を決めたという代数的な connection の定義の仕方である。γ は $W \otimes \Lambda$ の任意元であり、一般にあらゆる y と $\hbar$ のべきを含んでいるため、D は次数 deg を上げる演算子になっている。但し交換子の中に現れているので、centeral 1-form 分の不定性を含んでいることに注意しておく[10]。さて、通常通り D を 2 回作用させることで Weyl connection の曲率が得られる。

[10][3][4] では、この不定性を center 成分を 0 にするという規格化で固定していた。つまり、$\sigma(\gamma) = 0$。これを Weyl 規格化条件と呼ぶ。ここでは、特に固定はせず、$\gamma \in W \otimes \Lambda^1 / Z \otimes \Lambda^1$ と考えることにする。

補題 2.10　任意の元 $a \in W \otimes \Lambda$ に対し

$$D^2 a = \frac{i}{\hbar}[\Omega, a] \qquad \forall a \in W \otimes \Lambda \tag{2.22}$$

が成り立つ。ここで、Ω は D の曲率 2-form で、

$$\Omega := R + \nabla\gamma + \frac{i}{\hbar}\gamma \circ \gamma \ \in W \otimes \Lambda^2 \tag{2.23}$$

Ω は元の symplectic connection ∇ の曲率 R と、その ∇ の下での γ の field strength の形の部分から成っている。これを Weyl 曲率と呼ぶ[11]。また、Bianchi 恒等式 $D\Omega = 0$ も通常通り成り立つ。

さてこれから、上で構成した Weyl connection の中で特に、Abelian connection と呼ばれる概念を導入しよう。

定義 2.11　W 上の Weyl connection D は、任意の元 $\forall a \in W \otimes \Lambda$ に対し $D^2 a = 0$ が成り立つとき Abelian であると呼ばれる。言い換えると、曲率 Ω が central 2-form $Z \otimes \Lambda^2$ の元であるとき Abelian であるという。

Abelian の場合、Bianchi 恒等式から $D\Omega = d\Omega = 0$、つまり Ω が closed 2-form であることが導かれることに注意しておく。この Abelian であれという条件は、元々任意に置いた γ に対しての制限になっている。それは（以下で明らかになるのだが）、fiber ごとに定義された $\circ$ 積が貼り合わされて大域的な $*$ 積になりうるような connection の条件に他ならない。そうすると、どのようなときに Abelian connection が存在して、それはどのように分類されるのかが問題になってくる。

この問題に関する Fedosov の定理を述べよう [3]。Weyl connection D のうち初項が δ で始まるような形の connection を考える。

$$Da = \nabla a - \delta a + \frac{i}{\hbar}[r, a], \qquad r \in W_2 \otimes \Lambda^1 \tag{2.24}$$

これは (2.19) を用いると $\gamma = \omega_{ij} y^i dx^j + r$ ということである。

定理 2.12　与えられた (M, ω, ∇) に対し、任意の closed central 2-form $\Omega = \omega + \Omega_1$ $(\Omega_1 \in \hbar Z \otimes \Lambda^2)$ と section $\mu \in W_3$ を与えたとき、

$$\delta^{-1} r = \mu \tag{2.25}$$

を満たす r が一意的に存在し、式 (2.24) の D は曲率が Ω であるような Abelian connection になる。

定理が述べているのは、元のデータ (M, ω, ∇) を固定したとき、2つのパラメーター Ω_1 と μ だけで (2.24) の形の Abelian connection は決まるということである。ここで、$\Omega_1 \in \hbar Z \otimes \Lambda^2$ とは central 2-form でかつ $\hbar$ を必ず一つは含むものを意味し、symplectic form ω の $\hbar$ による補正と解釈される。一方 μ は r の一種の規格化条件である。実は、Fedosov の原論文 [3] ではこの2つのパラメーターが 0 の場合を証明していた。それは、量

[11] [3] では Weyl 規格化条件を課した時の Ω を Weyl 曲率と呼んでいるが、ここではより広い意味でそう呼ぶ。

子化に際して余計な自由度が入ってくるのは望ましくないからである。しかし、非可換変形という我々の立場では変形のモジュライパラメーターが現れるのは全く問題が無いことに注意しておく。

さて、ここでは厳密な証明は行わないが、r がどうやって一意的に決まるのかを説明しておこう。まず D が (2.24) の形のとき、曲率 2-form は

$$\begin{aligned} \Omega &= R + \nabla(\omega_{ij}y^i dx^j + r) + \frac{i}{\hbar}(\omega_{ij}y^i dx^j + r) \circ (\omega_{ij}y^i dx^j + r) \\ &= \omega + R + \nabla r - \delta r + \frac{i}{\hbar} r \circ r \end{aligned} \tag{2.26}$$

で与えられる。この曲率 Ω が center $Z \otimes \bigwedge^2$ に属するときに D は Abelian になる。既に $\omega \in Z \otimes \bigwedge^2$ であることはわかっているので、残りが、ある closed central 2-form Ω_1 にならなければならない。これを書き直して (2.25) と合わせると、

$$\begin{aligned} \delta r &= R - \Omega_1 + \nabla r + \frac{i}{\hbar} r \circ r \\ \delta^{-1} r &= \mu \end{aligned} \tag{2.27}$$

を満たすように r を決めるべし、という問題になる。更に、Hodge-de Rham 分解 $r = \delta\delta^{-1}r + \delta^{-1}\delta r$ を用いるとこれらは

$$r = \delta\mu + \delta^{-1}(R - \Omega_1) + \delta^{-1}\left(\nabla r + \frac{i}{\hbar} r \circ r\right) \tag{2.28}$$

に等価である。この方程式は両辺に解くべき r を含んでいるが、右辺の演算子 δ^{-1} が次数を必ず 1 だけ上げるので、両辺の r を次数で展開したときに帰納的に左辺の r の高い次数の項が右辺の低い次数の項から決まるという漸化式になっている。よって初項 $\delta\mu + \delta^{-1}(R - \Omega_1)$ を与えると一意的に r が決まることになる。(但し一意に決まる条件として初項は次数が 2 以上であることが必要なので、$deg\mu \geq 3$ かつ $deg\Omega_1 \geq 2$、つまり $\Omega_1 \in \hbar Z \otimes \bigwedge^2$ という制限が付くことに注意。) このプロセスを実行すると、R、Ω_1、μ とそれらに ∇ の掛かった項を係数として、y のあらゆるべきで展開された r が得られることになる。しかし、原理的には解けるとしても、実際にこの漸化式を解いて全次数の r を書き下すことは、一般には難しい。

2.3.4 Flat Section と $*$ 積

ここでは、いよいよ $*$ 積を構成する。

定義 2.13 Abelian connection D に対し、flat section の空間 $\bigwedge W_D$ を以下で定義する。

$$\bigwedge W_D := \{a \in W \otimes \bigwedge \mid Da = 0\} = \mathrm{Ker}D \cap (W \otimes \bigwedge) \tag{2.29}$$

D は graded derivation であるから、$\bigwedge W_D$ は自動的に $W \otimes \bigwedge$ の部分代数になっている。即ち、$a, b \in \bigwedge W_D \Rightarrow a \circ b \in \bigwedge W_D$ が成り立つ。また各 form の次数を区別するときは $\bigwedge^p W_D$ などと記すことにし、特に 0-form は $W_D := \bigwedge^0 W_D$ と表す。

Fedosov が証明した 2 つ目の定理は、この部分代数 W_D が線形空間として自然に $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ と同一視できることを主張している [3]。

定理 2.14　任意の関数 $a_0 \in Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ に対し、flat section $a \in W_D$ で $\sigma(a) = a_0$ を満たすものが一意的に存在する。

ここで、σ は (2.10) の projection で、定義域を W_D に制限すると

$$\begin{aligned}\sigma \quad &: \quad W_D \to Z = C^\infty(M)[[\hbar]] \\ &a \mapsto \sigma(a) := a|_{y=0}\end{aligned} \tag{2.30}$$

という写像になっている。この定理は σ の逆写像の存在、つまり W_D と $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ の元の一対一対応を主張している。簡単にそれを見てみよう。まず、a が flat section である条件 $Da = 0$ を書き直して $\delta a = (D + \delta)a$ とし、δ^{-1} を作用させて 0-form に対する Hodge-De Rham 分解を用いると、

$$a = \sigma(a) + \delta^{-1}(D + \delta)a \tag{2.31}$$

となる。$(D + \delta) = \nabla + \frac{i}{\hbar}[r, \ ]$ は次数を下げない演算で、δ^{-1} は必ず上げるので、先程の議論と同様に、a は $\sigma(a)$ を与えると帰納的に一意に決まる。$\sigma(a)$ として a_0 を与えれば、定理が示される。この (2.31) の定める逆写像を Q とおこう。

$$\begin{aligned}Q \quad &: \quad Z = C^\infty(M)[[\hbar]] \to W_D \\ &a_0 \mapsto Q(a_0) = a\end{aligned} \tag{2.32}$$

定理により σ、Q は W_D と $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ の間の線形空間としての同型射を定めている。但し、σ、Q は共に Abelian connection D ごとに異なる写像であることに注意する。特に Q は r を決める漸化式と同様、a_0、R、Ω_1、μ 達に共変微分 ∇ の掛かったものを係数として、y のあらゆるべきで展開されるもので、一般に非常に複雑な写像になっている[12]。

重要なのは W_D は単なる線形空間ではなく、結合積 $\circ$ による代数構造を持つことである。従って、この同型により、$Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ の方にも自然に結合積が移植される。これを $*$ 積と呼ぶ。即ち、

定義 2.15　$Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ における $*$ 積を

$$a_0 * b_0 = \sigma(Q(a_0) \circ Q(b_0)), \quad a_0, b_0 \in Z = C^\infty(M)[[\hbar]] \tag{2.33}$$

と定義する。

W_D に移って $\circ$ 積をとり、また Z に戻るわけである。このように定義された $*$ 積は §2.2 の $*$ 積の**定義 2.2** を満たすことが示される。特に、結合則は単に $\circ$ 積のそれから従う。但し、$\circ$ 積は fiberwise な積、つまり fiber W_x の方向 y の微分で書かれた単純な積であるのに対し、$*$ 積は一般に底空間 M の方向の x 微分を無限個含む複雑な積であることに注意する。これは、完全に写像 Q の複雑さに起因している。言い換えると、Q に $*$

[12] Q は、漸化式で r を決めてから更に漸化式を解くので、R、Ω_1、μ にも当然依っている。

積の情報が全て入っているわけである。この Q は Abelian connection D から決まる写像であるから、結局、我々の構成した $*$ 積は Abelian connection D と一対一に対応することになる。実は、定義 2.2 を満たす任意の $*$ 積は、ここで定義した $*$ 積に定義 2.3 の意味で同値であることが示されている。よって、非同値な $*$ 積はこの方法で全て構成できるのである。そして、その分類は、Abelian connection の分類の問題になる。これについては §§3.1 で多少議論する。

ここで、これまでの一般論について少しでもイメージを持つために、最も簡単な場合ではあるが、$*$ 積の例を1つ挙げておこう。

例 2.16 まず symplectic 多様体としては最も簡単な $M=\mathbb{R}^{2n}$ を考え、$\omega=\frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i\wedge dx^j$ は定数係数とする。よって flat な空間なので $\nabla=d$、$R=0$ となる。これが元のデータである。次に変形のモジュライについては自明な変形、つまり $\Omega_1=\mu=0$ とする。すると Abelian connection の条件式 (2.58) あるいは (2.59) に上の値を代入して解くと $r=0$ が解になる。従って、この場合の Abelian connection は

$$Da=(d-\delta)a=da+\frac{i}{\hbar}[\omega_{ij}y^idx^j,a] \tag{2.34}$$

で与えられ、その曲率は $\Omega=\omega$ である。またこの D の定める flat section W_D は $a_0(x)\in C^\infty(M)[[\hbar]]$ から今の場合の (2.31) 式 $a=a_0+\delta^{-1}da=a_0+\frac{1}{p}y^i\partial_ia$ を解けば求まる。これを解いても良いが、今の flat section とは単に

$$\frac{\partial a}{\partial x^i}-\frac{\partial a}{\partial y^i}=0 \tag{2.35}$$

を満たす section のことであるから、$a(x,y)$ が $x+y$ の組み合わせで引数を持つ、つまり

$$a(x,y)=a_0(x+y)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_p}a_0(x)y^{i_1}\cdots y^{i_p} \tag{2.36}$$

が解とわかる。従って最終的に $*$ 積は (2.33) の定義から

$$\begin{aligned}a_0(x)*b_0(x) &= \sigma(a_0(x+y)\circ b_0(x+y))\\ &= \sigma(a_0(x+y)\exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y^i}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y^j}}\right)b_0(x+y))\\ &= a_0(x)\exp\left(-\frac{i\hbar}{2}\omega^{ij}\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x^i}}\overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^j}}\right)b_0(x)\end{aligned} \tag{2.37}$$

となる。ここで最後の等号は ω_{ij} が定数でかつ $x+y$ が引数であるため、y^i 微分を x^i 微分に置き換えられることを用いた。よってこの自明な変形の場合に得られる $*$ 積は例 2.4 の Moyal-Weyl 積である。

さて、定理 2.14 は $\wedge W_D$ のうちの 0-form W_D について述べているが、一般の form についてはどうなのだろうか？ [4] では Abelian connection D の定める以下の complex

$$D:\ 0\to W\to W\otimes\wedge^1\to\cdots\to W\otimes\wedge^{2n}\to 0 \tag{2.38}$$

の 1 次以上の cohomology は自明であることを示している。即ち、$a \in W \otimes \wedge^q$ $(q \geq 1)$ が $Da = 0$ を満たすなら、必ずある $b \in W \otimes \wedge^{q-1}$ が存在して $a = Db$ と表される。但し $b \to b + c$, $c \in \wedge^{q-1} W_D$ と置き換えても変わらない。従って、flat section $\wedge^q W_D$ は加群としては $W \otimes \wedge^{q-1} / \wedge^{q-1} W_D$ と同型になる。そのため 0-form W_D が関数代数 $C^\infty(M)[[\hbar]]$ と同じ自由度だったのとは異なり、$\wedge^q W_D$ は $\wedge^q[[\hbar]] = C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \wedge^q$ より大きい。

最後に、これまでの結果をまとめておこう。我々は非可換空間を得るための手法として Weyl bundle による変形量子化を用いた。よって、最終的に得られた非可換代数 $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ は、量子論としての代数でなく、ある種の非可換空間として解釈されるものである。しかし、その $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ の情報は、それと同型な W_D の方を考えても全く等価であった。後者はもともと Weyl bundle の section の一部であるから、単に fiber が非可換であるような可換な M 上の fiber bundle に過ぎない。つまり、W_D の方で考える限り非可換幾何そのものを扱う必要はないということである。そればかりか、$Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ では、異なる $*$ 積は空間として異なるものを扱っていることになるが、Weyl bundle ではそれは connection の違いでしかない。このことは、非可換空間上の場の理論を物理的な理論として考察する際にも概念的に重要になってくる。

2.4 拡張

この節では、定義 **2.2** を満たす $*$ 積には拘らずに、非可換積として一般化することを考える [4]。以下の章で非可換ゲージ理論の構成に用いられるのはこの拡張された $*$ 積である。

これまでの Weyl bundle による $*$ 積の構成法がそのまま使えるような拡張として、大きく分けて次の 2 通りが考えられる。

- $\circ$ 積の変更
- 任意の結合代数構造の付加

言い換えると、$W \simeq C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes S(T^*M)$ のうち、$S(T^*M)$ と $C^\infty(M)[[\hbar]]$ をそれぞれ変更するということである。これを順に見ていこう。

2.4.1 $\circ$ 積の変更

ここまで、symplectic form ω は 2 通りの役割を担っていた。第一に、fiberwise な $\circ$ 積は ω を用いて定義されていた。第二に、ω は Abelian connection の Weyl 曲率 Ω の最低次として現れた。この役割を分離することを考える。それでも共に central 2-form である限り、Weyl bundle による構成法は使える。

(L, ω) を M 上の次元が $2n$ の symplectic vector bundle で、symplectic connection ∇^L を持つものとする。

また、L は TM に同型と仮定する。この bundle の同型（とその dual）を

$$\begin{aligned}\theta &: TM \to L \\ \delta &: L^* \to T^*M\end{aligned} \tag{2.39}$$

と記す。L の local symplectic frame を $(e_1, \cdots, e_{2n})$、L^* の dual frame を $(e^1, \cdots, e^{2n})$ とすると、この同型により T^*M 上の local 1-form basis θ^i と TM の dual basis である vector fields X_j がそれぞれ以下のように関係する。

$$\begin{aligned}&\theta^i = \delta(e^i),\ e_j = \theta(X_j), \\ &\langle e^i, e_j\rangle_L = \langle e^i, \theta(X_j)\rangle_L = \langle \delta(e^i), X_j\rangle_{TM} = \langle \theta^i, X_j\rangle_{TM} = \delta^i_j\end{aligned} \tag{2.40}$$

またこの同型により、L の symplectic form ω は M 上の非退化な 2-form on M に写像される。

$$\begin{aligned}&\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij} e^i \wedge e^j \qquad \omega(e_i, e_j) = \omega_{ij} \\ \mapsto\ &\Omega_0 = -\frac{1}{2}\omega_{ij}\theta^i \wedge \theta^j \qquad \Omega_0(X_i, X_j) = -\omega_{ij}\end{aligned} \tag{2.41}$$

この Ω_0 を M 上の symplectic form on M と見なすことができる（但し Ω_0 は closed $d\Omega_0 = 0$ でなければならない）。つまり固定した ω に対し、同型射 θ を変化させることで M 上の symplectic structure Ω_0 を変えることができるわけである。後で ω は $\circ$ 積の定義に用いられ、Ω_0 は Weyl 曲率の最低次になる。言い換えると、$W \simeq C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes S(L^*)$ と変更することになる。

この L は物理的に言えば、Riemann 多様体における local Lorentz frame の symplectic 多様体版である。即ち、Riemann 多様体の metric を symplectic テンソルに、Levi-Civita connection を symplectic connection に置き換えたときの vielbein 形式だと解釈できる。実際、ω が定数になるような local symplectic frame（L_x の Darboux 座標）を固定したとき、$\theta^i = \theta^i_\mu dx^\mu$ が vielbein 1-form であり、それぞれの symplectic テンソルの関係 $\Omega_{0\mu\nu} = -\omega_{ij}\theta^i_\mu\theta^j_\nu$ は $g_{\mu\nu} = \eta_{ij}\theta^i_\mu\theta^j_\nu$ の類似である。Riemann 多様体では、$g_{\mu\nu}$ と θ^i_μ の自由度の差が $SO(2n)$ local Lorentz 変換の自由度であったが、symplectic 多様体の場合は、$Sp(n)$ local symplectic 変換がこれに相当する。そして spin connection に相当するのが ∇^L である。

2.4.2 任意の結合代数構造の付加

Weyl bundle による我々の構成は、演算子 δ などの構造を変えない限り、fiber に他の積構造をテンソルすることができる。言い換えると、(2.9) では可換な通常の積であった係数 $a_{k,i_1\cdots i_p}$ 同士の積を、任意の結合積にしても良い。これは bundle の section で与えられるような結合代数 $\mathcal{A}$ を用いて $C^\infty(M)$ を置き換えること、即ち W を $W \simeq \mathcal{A}[[\hbar]] \otimes S(T^*M)$ に変更することを意味している。例えば、E を M 上の適当な複素ベクトルバンドルとし、それに付随する E の自己準同型写像 $E \to E$ の全体の成す bundle を $\mathrm{Hom}(E, E) = \mathrm{End}E$ とすると、その section

$$\mathcal{A} := C^\infty(M, \mathrm{End}E) \tag{2.42}$$

は写像の合成について結合代数を成す。以下では簡単のため、E は N 次元の複素ベクトルバンドルで $U(N)$ の基本表現の場合を考える。このとき $\mathcal{A}$ は $U(N)$ ゲージバンドル、つまり $N\times N$ 行列値の section 全体になる[13]。その場合、Weyl bundle の構成に従って得られる $*$ 積も $U(N)$ ゲージ変換の構造を内包することになる[14]。つまり、$C^\infty(M)[[\hbar]]$ ではなく $\mathcal{A}[[\hbar]]$ の上に $*$ 積が定義される。なお、先程と同様の構成をするためには connection も必要である。そこで ∇^E を E 上の connection から自然に得られる $\mathcal{A}$ 上の connection とする。

ここでは詳しくはやらないが、別の例としては、実ベクトルバンドル E に対し、その dual Grassmann algebra bundle $\wedge E^*$ を複素化した section 全体を $\mathcal{A}$ とすることもできる。つまり

$$\mathcal{A} := C^\infty(M, \wedge E^*) \tag{2.43}$$

この場合の $\mathcal{A}$ の代数構造は fiberwise な wedge 積で与えられるため、$\mathbf{Z}_2$ grading を持つ supercommutative な代数である。物理的にはこれは Grasmann odd な fermionic 座標 θ^α により展開した代数と思って良い。つまり $\mathcal{A}$ の元である section を superfield と解釈できる。この $\mathcal{A}$ を用いて上と同じく $W\simeq\mathcal{A}[[\hbar]]\otimes S(T^*M)$ と置き換えれば superfield に対する $*$ 積が得られるが、この場合は単にそうするだけではなく、更に $\circ$ 積も同時に変更することができる。即ち、E の fiber metric を $q_{\alpha\beta}$ とし、$\circ$ 積を

$$a\circ b := a\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\omega^{ij}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial y^i}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial y^j}+q^{\alpha\beta}\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\theta^\beta}\right)\right]b \tag{2.44}$$

と変更する。このとき得られる $*$ 積は super star product と呼ばれ、その交換子は最低次に super Poisson 括弧を含むものになる [17]。

このように、代数 $\mathcal{A}$ の取り方によって、いろいろな構造を加えた拡張が考えられる。以下ではゲージ理論に焦点を絞るので、最初の例の $\mathcal{A}:=\mathrm{End}E$ の場合を考える。また、これまでと同様に bundle とその section は区別せず同じ記号で表す。

2.4.3 Weyl Bundle $W(L,\mathcal{A})$ の構成

さて、以上のことを念頭において、拡張を行おう。出発点のデータは symplectic 多様体 (M,Ω_0) に加え、symplectic vector bundle とその上の symplectic connection (L,ω,∇^L)、係数 bundle とその上の connection $(\mathcal{A}=\mathrm{End}E,\nabla^E)$ である[15]。

まずは、Weyl bundle を定義する。今度は fiber L_x が線形な symplectic 空間なので、ここに Moyal-Weyl 積を導入し、それらを束ねて algebra bundle にする。更に、係数は $\mathcal{A}$ に値をとるものにとる。

[13] 元々エルミート性は考慮していないので、ここでも単に行列とする。
[14] 逆に、これまでの Weyl bundle は $U(1)$ ゲージバンドルと見なせる。
[15] 任意の symplectic 2-form Ω_0 に対し bundle の同型 θ が存在して ω からの写像になることが示せるので、θ の代わりに Ω_0 を独立なデータとして良い。

定義 2.17 L に付随し、係数が $\mathcal{A}$ に値をとる M 上の formal Weyl algebra bundle $W(L,\mathcal{A})$ とは、$\mathbf{C}$ 上の unital associative algebra の bundle で、その section は

$$a(x,y,\hbar)=\sum_{2k+p\geq 0,k\geq 0}\hbar^k\frac{1}{p!}a_{k,i_1\cdots i_p}(x)y^{i_1}\cdots y^{i_p} \tag{2.45}$$

で与えられる形式的べき級数である。ここで、$y=(y^1,\cdots,y^{2n})$ は fiber L_x の線形な座標で、係数 $a_{k,i_1\cdots i_p}(x)$ は $i_1,\cdots,i_p$ に関して対称な $\mathcal{A}$ の section である。また、結合積は Moyal-Weyl 積

$$a\circ b:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i\hbar}{2}\right)^n\omega^{i_1j_1}\cdots\omega^{i_nj_n}\frac{\partial}{\partial y^{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y^{i_n}}a\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial y^{j_n}}b \tag{2.46}$$

により与えられる。但し、係数に対しても $\mathcal{A}$ における積をとることとする。

つまり、$\circ$ 積が L の座標 y に関してとられることと、$\mathcal{A}$ の積、つまり $N\times N$ 行列の積もとることが変わっただけである。言い換えると $W(L,\mathcal{A})\simeq\mathcal{A}[[\hbar]]\otimes S(L^*)$ である。もちろん、$L=TM$ かつ $\mathcal{A}=C^\infty(M)$ の時に $W(L,\mathcal{A})$ は元の W に帰着する。次数の与え方や filtration などは同じである。$W(L,\mathcal{A})$ の center Z は y に依らず、かつ $\mathcal{A}$ の identity、つまり diagonal $U(1)$ に値をとる section 全体であるから、以前と同じく $Z=C^\infty(M)[[\hbar]]$ として良い。しかし、$y=0$ 成分への projection σ の像はこの場合 center Z ではなく、$\mathcal{A}$（の $\hbar$ 変形）の section $C^\infty(M,\mathcal{A})[[\hbar]]$ になっている。ここが本質的に異なる点である。

$$\begin{aligned}\sigma\quad:\quad & W(L,\mathcal{A})\to\mathcal{A}[[\hbar]]:=C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\\ & a\mapsto\sigma(a):=a|_{y=0}\end{aligned} \tag{2.47}$$

M 上の $W(L,\mathcal{A})$ に値をとる微分形式も同様に、bundle $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の section として定義される。その元は局所的には、

$$a(x,y,\hbar)=\sum_{2k+p\geq 0,k\geq 0}\hbar^k\sum_{q=0}^{2n}\frac{1}{p!q!}a_{k,i_1\cdots i_p,j_1\cdots j_q}(x)y^{i_1}\cdots y^{i_p}\theta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{j_q} \tag{2.48}$$

と表される。これら section 全体は再び結合代数を成すが、今度は $\circ$ 積は、y^i の Moyal-Weyl 積、係数である $\mathcal{A}$ の行列の積、θ^j の wedge 積から成ることに注意する。それに伴い、交換子 $[a,b]=a\circ b-(-1)^{|a||b|}b\circ a$ は $\mathcal{A}$ の Lie 括弧から始まることに注意する。即ち

$$[a,b]=[a,b]_{\mathcal{A}}-i\hbar\{a,b\}_\omega+O(\hbar^2) \tag{2.49}$$

第 2 項は ω に関する Poisson 括弧で、拡張前はこの項が最低次であった。その他は、centeral form $Z\otimes\wedge$、filtration $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\supset W_1(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\supset W_2(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\supset\cdots$ などには変更はない。

次に、Weyl bundle $W(L,\mathcal{A})$ 上の conection を考える。元のデータの connection ∇^L、∇^E は自然に $W(L,\mathcal{A})$ 上の connection $\nabla=\nabla^E\otimes 1+1\otimes\nabla^L:W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^q\to W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^{q+1}$ と見なせ[16]、L の local symplectic

[16] $W(L,\mathcal{A})\simeq\mathcal{A}[[\hbar]]\otimes S(L^*)$ への作用の意味でテンソル積を用いた。

frame を用いた表式は以下で与えられる。

$$\nabla a = da + \frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\Gamma_{ij}y^iy^j, a\right] + [\Gamma_E, a] \tag{2.50}$$

ここで、$d = \theta^i X_i$ は外微分で、$\Gamma_{ij} := \omega_{ik}\Gamma^k{}_j$ は ∇^L の local connection 1-form [17]、Γ_E は ∇^E の $\mathcal{A}$ 値 local connection 1-form である。第二、三項は共に $\circ$ 積の交換子の形で表されているが、第二項については (2.16) の表式と同じく $W(L,\mathcal{A})$ 値にしたことで交換子で書けているのに対し、第三項の交換子は Γ^E が center であるため実質 $\mathcal{A}$ の Lie 括弧しか効いていないことに注意する。ともかく、交換子で表されることから、∇ は graded derivation である（∇^L、∇^E も同様)。

$$\nabla(a \circ b) = \nabla a \circ b + (-1)^{|a|} a \circ \nabla b \tag{2.51}$$

また、この connection の曲率 2-form は

$$\begin{aligned}
\nabla^2 a &= \frac{i}{\hbar}[R, a] \\
R &:= \frac{1}{2}R_{ij}y^iy^j - i\hbar R_E \\
R_{ij} &:= \omega_{ik}R^k{}_j = \omega_{ik}(d\Gamma^k{}_j + \Gamma^k{}_l \wedge \Gamma^l{}_j) \\
R_E &= d_x\Gamma_E + \Gamma_E \wedge \Gamma_E
\end{aligned} \tag{2.52}$$

ここで R_{ij}、R_E はそれぞれ ∇^L、∇^E の曲率である[18]。R は次数 2 以上の元 $R \in W_2(L,\mathcal{A}) \otimes \wedge^2$ であることに注意しておく。更に、(2.21) と同じく一般の Weyl connection を

$$Da = \nabla a + \frac{i}{\hbar}[\gamma, a] \tag{2.53}$$

と定義する。この定義に関して 2 つの注意を与えておく。まず (2.21) のところでは正確には説明しなかったが、この表示 (2.53)、つまり D を ∇ と γ で分ける分け方は一意的ではないことに注意する。それは別の Weyl connection の表示 $Da = \nabla' a + \frac{i}{\hbar}[\gamma', a]$ があるとすると、$\nabla' a - \nabla a = \frac{i}{\hbar}[\frac{1}{2}\Delta\Gamma_{ij}y^iy^j - i\hbar\Delta\Gamma_E, a]$ であるから、この差は γ' の次数 2 の項とも見なせるからである。つまり、次数 2 の項をどちらに含めるかという不定性がある。それを γ に含めることにすれば ∇ は常に固定できる。このときの差 $\gamma' - \gamma$ は central 1-form になるが、これは (2.21) でも述べた γ の center 分の不定性である。次に、交換子が (2.49) という展開を持つことに伴い、演算子 $\frac{i}{\hbar}[\gamma,\ ]$ が graded derivation であるためには任意の $\gamma \in W(L,\mathcal{A}) \otimes \wedge^1$ ではなく多少の制限が付く。これについては Appendix A.1 と §3.1 を参照。

曲率は (2.23) と同様に

$$\Omega := R + \nabla\gamma + \frac{i}{\hbar}\gamma \circ \gamma \tag{2.54}$$

で与えられる。また、δ、δ^{-1} は (2.17) と同じ役割の演算子で、今の場合は

$$\delta = \theta^i \wedge \frac{\partial}{\partial y^i} = -\frac{i}{\hbar}[\omega_{ij}y^i\theta^j,\ ] \qquad \delta^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{p+q}y^i I(X_i) & (p+q>0) \\ 0 & (p+q=0) \end{cases} \tag{2.55}$$

[17] この表式は local symplectic frame、つまり ω_{ij} = 定数で正しい。このとき $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ が成り立つ。
[18] $R_{ij} = R_{ji}$ が成り立つ。

で定義する。特に $a = a_i y^i = a_i e^i \in L^*$ に対して $\delta a = a_i \theta^i = a_i \delta(e^i) \in T^*M$ であるから、この δ は (2.39) の同型 $\delta : L^* \to T^*M$ と一致している。これら演算子の性質命題 **2.7** は (2.47) の σ の意味で成立している。

さて、ここで (2.24) と同じ形の connection

$$Da = \nabla a - \delta a + \frac{i}{\hbar}[r, a] \qquad r \in W_2(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^1 \tag{2.56}$$

を考えると、定理 **2.12** とほぼ同様のことが成り立つ。

定理 2.18　与えられた $(M, \theta, L, \omega, \mathcal{A}, \nabla)$ に対し、任意の closed central 2-form $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1$ $(\Omega_1 \in \hbar Z \otimes \wedge^2)$ と section $\mu \in W_3(L, \mathcal{A})$ を与えたとき、

$$\delta^{-1} r = \mu \tag{2.57}$$

を満たす $r \in W_2(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge^1$ が一意的に存在し、D は Weyl 曲率が Ω であるような Abelian connection になる。

定理 **2.12** との違いは、μ が $\mathcal{A}$ に値をとることだけである。r を定める方程式は今の場合

$$\begin{aligned} \delta r &= \nabla(\omega_{ij} y^i \theta^j) + R - \Omega_1 + \nabla r + \frac{i}{\hbar} r \circ r \\ \delta^{-1} r &= \mu \end{aligned} \tag{2.58}$$

となる。または Hodge-de Rham 分解により

$$r = \delta\mu + \delta^{-1}\left(\nabla(\omega_{ij} y^i \theta^j) + R - \Omega_1\right) + \delta^{-1}\left(\nabla r + \frac{i}{\hbar} r \circ r\right) \tag{2.59}$$

であり、これは帰納的に解くことができる。従って、Abelian connection は ∇、Ω、μ により一意的に決まることになる[19]。なお、新たな項 $\nabla(\omega_{ij} y^i \theta^j) = \nabla^L(\omega_{ij} y^i \theta^j)$ は ∇^L の torsin 部分である。つまり同型 $\theta : TM \to L$ により ∇^L は M 上の connection に写されるが、それは M の symplectic form Ω_0 は保つが $\nabla(\omega_{ij} y^i \theta^j) = \nabla^L(\omega_{ij} y^i \theta^j)$ の項が 0 でなければ torsion free ではない。しかし、y の 2 次の $\delta^{-1}\nabla(\omega_{ij} y^i \theta^j)$ を ∇^L に含めて ∇^L を固定しておけば（(2.53) の下の注意を参照）∇^L は同型 θ により torsion free な symplectic connection を与える。

なお (2.58)(2.59) を少し違う表式で表して、パラメーター μ、Ω_1 の役割を分離することもできる。。まず r を以下の様に対称部分とそれ以外に分離する。

$$\begin{aligned} r_s &:= \sum_{2k+l \geq 2} \hbar^k \frac{1}{l!} r_{k,(i_1 \cdots i_l, j)} y^{i_1} \cdots y^{i_l} \theta^j \\ r_a &:= r - r_s \end{aligned} \tag{2.60}$$

[19] 本当は $(M, \theta, L, \omega, \mathcal{A}, \nabla)$ と (Ω_1, μ) であるが、動かせるパラメーター $(\theta^i, \omega_{ij}, \Gamma_{ij}, \Gamma^E, \Omega_{1ij}, \mu)$ だけををまとめて書いた。

ここで、$(i_1\cdots i_l,j)$ は対称化を表す。そうすると、(2.58)(2.59) は、

$$\begin{aligned}
&\delta^{-1}r_s=\mu, \qquad \delta r_s=0\\
&\delta^{-1}r_a=0, \qquad \delta r_a=\nabla(\omega_{ij}y^i\theta^j)+R-\Omega_1+\nabla r_s+\frac{i}{\hbar}r_s\circ r_s+\nabla_s r_a+\frac{i}{\hbar}r_a\circ r_a\\
&\to r_s=\sum_{2k+l\geq 2}\hbar^k\frac{1}{l!}\mu_{k,i_1\cdots i_l j}y^{i_1}\cdots y^{i_l}\theta^j\\
&\to r_a=\delta^{-1}\left(\nabla(\omega_{ij}y^i\theta^j)+R-\Omega_1+\nabla r_s+\frac{i}{\hbar}r_s\circ r_s\right)+\delta^{-1}\left(\nabla_s r_a+\frac{i}{\hbar}r_a\circ r_a\right)
\end{aligned}\tag{2.61}$$

ここで $\nabla_s a:=\nabla a+\frac{i}{\hbar}[r_s,a]$ とした。すぐわかるように、r_s はほとんど μ そのもので、漸化式は出てこない。一方、r_a の方は (2.58)(2.59) の方程式で、$\mu=0$ とする代わりに $\nabla\to\nabla_s$ としたものに等しい[20]。このことから、μ は元の connection ∇ を y や $\hbar$ に関して非線型にする変形を担っていると言える。実際、μ はその最低次に ∇ の不定性（を γ の方に含めたとき）の自由度を含んでいる。[21] 。これに対し、(2.58)(2.59) を次数で分けるとわかるように、Ω_1 は常に $i\hbar R^E+\Omega_1$ という組み合わせで現れる。よって、Ω_1 は symplectic form Ω_0 の $\hbar$ 変形という解釈の他に、field strength R_E の $U(1)$ 部分の $\hbar$ 変形と解釈することもできる。これは $U(1)$ ゲージ自由度は symplectic 多様体として見れば symplectic structure に組み込むことができるという一般的事情の反映である。

ともかく、Abelian connection D が得られれば、あとは、$*$ 積は先程と同様のプロセスで定義できる。まず、flat section の空間は同じく

$$\wedge W_D:=\{a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\mid Da=0\}=\mathrm{Ker}D\cap(W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge)\tag{2.62}$$

とする。特に $W_D:=\wedge^0W_D$ である。このとき、今の Weyl bundle $W(L,\mathcal{A})$ の場合の定理 **2.14** にあたるものは、W_D と center $Z=C^\infty(M)[[\hbar]]$ の一対一対応ではないことに注意する。この節の冒頭で述べたように、一対一対応するのは、σ で結びつく W_D と $C^\infty(M,\mathcal{A})[[\hbar]]=C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ である。即ち、

定理 2.19　任意の section $a_0\in C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ に対し、flat section $a\in W_D$ で $\sigma(a)=a_0$ を満たすものが一意的に存在する。

証明は定理 **2.14** と全く同じで、単に projection σ の像が変わっただけである。また、それに応じて逆写像 Q も変更される。まとめておくと、

$$\begin{aligned}
\sigma\ &:\ W_D\to C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\\
&\quad a\mapsto\sigma(a):=a|_{y=0}
\end{aligned}\tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
Q\ &:\ C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\to W_D\\
&\quad a_0\mapsto Q(a_0)
\end{aligned}\tag{2.64}$$

[20] このときの曲率は $R+\nabla r_s+\frac{i}{\hbar}r_s\circ r_s$ であり、また $\nabla_s(\omega_{ij}y^i\theta^j)=\nabla(\omega_{ij}y^i\theta^j)$ ゆえ。
[21] [18] では μ の効果を指数写像の言葉で説明している。

そして、最終的に $*$ 積はこれらの写像から、$a_0, b_0 \in C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ に対して

$$a_0 * b_0 = \sigma(Q(a_0) \circ Q(b_0)) \tag{2.65}$$

と定義される。特定の $*$ 積を持つ代数であることを顕わに表すときは $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ とも書く。

今度も $*$ 積は Abelian connection D と一対一に対応していることは重要である。また、$*$ 積の定義されている空間が $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ ではなく $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ であるので、今の場合は元の 定義 2.2 は満たしていない。特に、$*$ 積の交換子の初項は Poisson 括弧から始まるのではなく、$\mathcal{A}$ の Lie 括弧、つまり $[a_0, b_0]_* = [a_0, b_0]_{\mathcal{A}} + \mathcal{O}(\hbar)$ となっている。しかし我々の立場では、今の場合の変形は量子化ではなく非可換幾何学化であるので、何の問題も無い。それどころか、$Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ がある種の非可換多様体（上の関数代数）と解釈されるとすると、この拡張により得られた $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の方は、ゲージバンドル $\mathcal{A}$ を含むため、ゲージ理論の非可換幾何学化になっていることになる。更にそれが $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ という非可換多様体の上の非可換ゲージ理論であると予想できる。我々は非可換空間そのものばかりでなく、その上のゲージ理論に興味があるので、この拡張した $*$ 積の構造をより深く調べる必要がある。次の章では、ゲージ変換の立場からこのことを検証していく。

第3章　非可換空間上のゲージ理論

第2章では、変形量子化の手法を用いて非可換空間を構成することについて議論してきた。そこでは最終的に、非可換代数として $Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ あるいは $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ が得られた。但し、それらと同型な W_D で考える限り、非可換幾何の言葉で全てを考える必要はないことも既に指摘した。この章では、その Weyl bundle の方に注目し、可換な幾何の言葉を用いて非可換空間上のゲージ理論について考察する。可換な言葉で言うところのゲージ理論とは、ベクトルバンドルとその上の connection に他ならない。よって具体的には、非可換ゲージ変換を Weyl bundle の持つゲージ変換の一部として定義し、対応する非可換ゲージ場を与えるのが目標である[1]。

3.1　ゲージ対称性としての代数の自己同型

第2章では、元の connection ∇ を拡張して Weyl bundle 上に Weyl connection D を代数的に定義した。一般に、bundle 上の connection を定義する仕方はいろいろあるが、物理的に最も良く用いられるのは、座標変換やゲージ変換に付随する共変微分としての特徴付けであろう。これらの変換は、代数的にはその代数の自己同型写像に他ならない。この節では、Weyl bundle $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ の自己同型について調べ、connection D の共変外部分としての側面を明らかにする。

3.1.1　Weyl ゲージ変換としての $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ の自己同型

まず最初に、元の connection ∇ と自己同型の関係について見ておこう。多様体 M の diffeomorphism（微分同相写像）$f : M \to M$ に対し、関数代数にはその pull-back $f^* : C^\infty(M)[[\hbar]] \to C^\infty(M)[[\hbar]]$ が通常通り $f^*a(x, \hbar) = a(f(x), \hbar)$ と作用している（f^* の微分形式への作用も通常通りである。）。これは、$C^\infty(M)[[\hbar]]$ の automorphism（自己同型写像）になっている[2]。ある bundle の section に対しても、bundle の同型への f^* の lifting を与えると、pull-back は定まる。L への symplectic lifting を $\rho(x) : L_x \to L_{f(x)}$、$E$ への lifting を $v(x) : E_x \to E_{f(x)}$ とする。つまり ρ は $2n \times 2n$ 行列値関数で $\rho(x)^k{}_i \omega_{kl}(f(x)) \rho(x)^l{}_j = \omega_{ij}(x)$ を満たすものであり（よって局所 symplectic frame に対しては $Sp(n)$ 行列値)、一方 v は $U(N)$ 行列値関数である。Weyl

[1] この章が論文 [1] のメインパートである。
[2] $C^\infty(M)[[\hbar]]$ はもちろん Weyl bundle の係数としての可換環のことであり、$*$ 積の代数ではない。

bundle $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の section の場合には、これらの lifting を自然に埋め込んだものになる。即ち f^* は

$$f^*a(x,y,\hbar):=v(x)^{-1}a(f(x),\rho(x)y,\hbar)v(x) \tag{3.1}$$

と作用するとする。つまり、各 y に関しては ρ を作用させ、$\mathcal{A}$ 値である係数には v を作用させるのである。また、対応する push-forward は $f_*=(f^*)^{-1}$ で定義される。これらは $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の自己同型 $f_*:W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\mapsto W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ を与えている。また、自己同型 f_* に付随して、connection ∇ の image（像）と呼ばれる新しい connection $\nabla'=f_*\nabla f^*$ が定義される。

よく知られているように、lifting を決めるということは connection を決めることと等価である。今の場合、ρ は ∇^L を、v は ∇^E を定めている。そして、(3.1) の f^* は Weyl bundle 上の $\nabla=\nabla^E\otimes 1+1+\nabla^L$ を定めている。特に、f が恒等写像の時、つまり $a(x,y,\hbar)\mapsto a'(x,y,\hbar):=v(x)^{-1}a(x,\rho(x)y,\hbar)v(x)$ という変換は、fiberwise な変換、つまりゲージ変換であり、∇ はその共変外微分である[3]。ゲージ変換の立場から言うと、ρ は $Sp(n)$ 局所 symplectic 変換と解釈できる。つまり、Riemann 多様体における $SO(2n)$ local Lorentz 変換の symplectic の場合の類似である。よって、これは多様体の diffeomorphism と密接に結びついている。一方、v の方は普通の $U(N)$ ゲージ変換である。これは fiberwise な変換で、単に diffeomorphism と同時に行うだけのものであることに注意する。この事情から、別の pull-back f^{0*} を用意しておくと後で便利である。即ち、L への lifting のみを取り出して、

$$f^{0*}a(x,y,\hbar):=a(f(x),\rho(x)y,\hbar) \tag{3.2}$$

と定義する。また、対応する push-forward は $f^0_*=(f^{0*})^{-1}$ で与えられる。以上をまとめると、

$$\begin{aligned}
f^{0*}a(x,y,\hbar) &= a(f(x),\rho(x)y,\hbar),\\
f^0_*a(x,y,\hbar) &= a(f^{-1}(x),(\rho(f^{-1}(x)))^{-1}y,\hbar),\\
f^*a(x,y,\hbar) &= v(x)^{-1}a(f(x),\rho(x)y,\hbar)v(x)=v(x)^{-1}f^{0*}a(x,y,\hbar)v(x),\\
f_*a(x,y,\hbar) &= v(f^{-1}(x))a(f^{-1}(x),(\rho(f^{-1}(x)))^{-1}y,\hbar)v(f^{-1}(x))^{-1}\\
&= f^0_*(v(x)a(x,y,\hbar)v(x)^{-1})
\end{aligned} \tag{3.3}$$

もちろん、a が center の元であれば全ては通常の pull-back あるいは push-forward に帰着し、a が y を含まなければ f^{0*}、f^0_* はそれぞれ通常の pull-back、push-forward に帰着する。以上のように、単に ∇ を埋め込んだ場合、$Sp(n)\times U(N)$ のゲージ群しか持たない。

では、Weyl bundle のより一般の connection D と関係する自己同型はどのようなものなのだろうか。ここでは、天下りにその写像を与えることにする。そのために $W(L,\mathcal{A})$ を少し拡張して、代数 W^+ を導入する [3]。その元は以下のような形式的べき級数である。

$$U(x,y,\hbar)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{2k+p=l,\text{finite sum}}\hbar^k\frac{1}{p!}U_{k,i_1,\cdots i_p}(x)y^{i_1}\cdots y^{i_p},\qquad U_{k,i_1,\cdots i_p}\in C^\infty(M)\otimes\mathcal{A} \tag{3.4}$$

[3]それは、$\nabla'=f_*\nabla f^*$ で f が恒等写像の時の形からわかる。

つまり、各項の $\hbar$ と y の数を測る全次数は $W(L,\mathcal{A})$ と同じく非負であるが、$\hbar$ だけを見れば負べきも許すという拡張である（言い換えると、$C^\infty(M)[[\hbar]]$ から $C^\infty(M)[\hbar^{-1},\hbar]]$ への係数環の拡大である）。これにより W^+ の元には $\circ$ 積に関する逆元が存在しうる。特に、以下の形の元を考える。

$$U=\exp_\circ\left(\frac{i}{\hbar}H\right):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{i}{\hbar}H\right)^k,\qquad H\in W_2(L,\mathcal{A}) \tag{3.5}$$

ここで、H の積は全て $\circ$ 積である。また、U が W^+ に属するためには全次数が非負でなければならないので、$H\in W_2(L,\mathcal{A})$ の制限がついている。この U の形から想像がつくと思うが、Baker-Campbell-Hausdorff 公式を用いると、この形の U たちは $\circ$ 積を掛け算として群を成していることがわかる。つまり、$U_1,U_2\in W^+\Rightarrow U_1\circ U_2\in W^+$。もちろんこの群は非可換 $U_1\circ U_2\neq U_2\circ U_1$ であり、$U=\exp\left(\frac{i}{\hbar}H\right)$ の逆元は $U^{-1}=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\right)$ である。そこで、$a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ に対し次のような写像 A を考える。

$$A:a\mapsto U^{-1}\circ a\circ U=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^k[H,[H,\cdots,[H,a]\cdots]] \tag{3.6}$$

この写像は $\circ$ 積だけで書かれた fiberwise な変換であるから、ゲージ変換の一種で、その "無限小部分" H がその Lie 代数を成していることが予想できる。但し H は交換子の中にのみ現れるため、H の center 分は写像 A には効かないことに注意する[4]。

明らかにこの写像は $W^+\otimes\wedge$ で見れば自己同型である。なぜなら $A:W^+\otimes\wedge\to W^+\otimes\wedge$ は全単射でかつ準同型、つまり $A(a\circ b)=A(a)\circ A(b)$、$A(1)=1$ が成り立つからである。しかし我々が考えたいのは $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の自己同型である。従って必要なのは、この写像による $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の像が再び $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ に属するような H である。その必要条件として、変換の "無限小部分" に対して $\frac{i}{\hbar}[H,a]\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ が成り立つことが要求される。次数だけから見れば $H\in W_2(L,\mathcal{A})$ であれば良いように思えるが、それでは $\hbar$ の負べきが残ってしまい実は正しくない。これは一般に演算子 $\frac{i}{\hbar}[H,\ ]$ が $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の derivation である条件を知ることに他ならない。この詳細は煩雑なので Appendix A.1 に与えておく。その結果に次数が 2 以上である条件を合わせると、

$$W_2'(L,\mathcal{A}):=\hbar W(L,\mathcal{A})\oplus S_2(L^*) \tag{3.7}$$

が、許される H の全体になる（$S_2(L^*)$ は y の 2 次以上の多項式で $C^\infty(M)$ 係数の全体を表す）。つまりこのとき、$H\in W_2'(L,\mathcal{A})$ から作られる演算子 $\frac{i}{\hbar}[H,\ ]$ は $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の derivation になるわけである。後で見るように、これは connection 1-form γ に対応する無限小ゲージ変換に他ならない。実はこれらのうち、次数が 2 の集合 $\hbar\mathcal{A}\oplus S^{(2)}(L^*)$ に属する H はそれぞれ $\mathcal{A}$、L の無限小ゲージ変換に対応している。これは γ が固定した ∇^E、∇^L からの差 $\hbar\Gamma_E\in\hbar\mathcal{A}$、$\frac{1}{2}\Gamma_{ij}y^iy^j\in S^{(2)}(L^*)$ を含んで定義されているという (2.53) の下辺りで説明した事情にちょうど対応する。従って、Weyl bundle に固有の自己同型に関しては、H が次数 3 以上の場合を考えれば良い。よって H が

$$H\in W_3'(L,\mathcal{A}):=\hbar W_1(L,\mathcal{A})\oplus S_3(L^*) \tag{3.8}$$

[4]次数の制限も合わせると、$H\in W_2(L,\mathcal{A})/\hbar Z$ が A を定めている。

のときの写像 A を $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の自己同型と考える。このとき、$\frac{i}{\hbar}[H,\ ]$ という演算は $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の derivation であり、H 達は U の成す群を生成する Lie 代数を成している。特に、H は線形空間として無限次元であるから、無限次元の代数である。また、H は次数が 3 以上であるため、この写像は必ず高次の項が現れるような変換 $a\mapsto a+O(\hbar,y)$ であること、つまり filtration は保存するが次数は保存しない変換であることに注意する。以上が Weyl bundle $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ に特有の自己同型である。

次に、先程の自己同型と組み合わせて、より一般の自己同型を考えよう。即ち、我々の考える最も一般の自己同型 A_f を以下のように定義する。

$$A_f : a\mapsto f_*(U^{-1}\circ a\circ U),\qquad a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge \tag{3.9}$$

f_* には L と $\mathcal{A}$ の変換が既に含まれているので、上で定義した $H\in W_3'(L,\mathcal{A})$ なる U の範囲でちょうど過不足が無い。この A_f は先程のような言い方をすれば、diffeomorphism f の Weyl bundle への lifting を与えたことに相当している。そして、その lifting に対応する共変外微分が我々の与えた Weyl connection D である。つまり先程と同様に、f が恒等写像の時には A_f は fiberwise な自己同型であるが、その変換に対応するゲージ場が、(2.56) で新たに加えた connection 1-form γ になるのである。以下ではそのことを見る。

但し、そのためには f^{0*} を用いた表式の方が便利である。つまり、v の作用と U の作用が同じ conjugation の形であることから、v を U に含めてしまうことにするかわりに f^* を f^{0*} にする。先程の議論から明らかなように、それは U を定める H の定義される範囲に $\hbar\mathcal{A}$ を加えれば良い。従って、最終的に

定義 3.1 Weyl bundle の section の成す代数 $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の自己同型 $A_f : W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\mapsto W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ を以下で定義する。

$$\begin{aligned} A_f\ &:\ a\mapsto f_*^0(U^{-1}\circ a\circ U),\qquad a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge,\\ U &= \exp_\circ\left(\frac{i}{\hbar}H\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{i}{\hbar}H\right)^k,\ H\in W_3''(L,\mathcal{A}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

ここで、$W_3''(L,\mathcal{A})=W_3'(L,\mathcal{A})\oplus\hbar\mathcal{A}=\hbar W(L,\mathcal{A})\oplus S_3(L^*)$ である。

さて、この自己同型 A_f の下で Weyl bundle の connection D の A_f による像は

$$D'a := A_f D({A_f}^{-1}a) \tag{3.11}$$

で与えられる。ここで、我々の自己同型の定義で v を U に含めたことに相当して、(2.56) の D の表式も以下の様に書き換えておく。

$$\begin{aligned} Da &= \nabla^L a+\frac{i}{\hbar}[\hat\gamma,a],\ \ a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge\\ \hat\gamma &:= -i\hbar\Gamma_E+\gamma\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^1\\ \to\Omega &= \frac{1}{2}R_{ij}y^iy^j+\nabla^L\hat\gamma+\frac{i}{\hbar}\hat\gamma\circ\hat\gamma \end{aligned} \tag{3.12}$$

つまり、$\mathcal{A}$ の connection 1-form Γ_E を γ の方に含めた。この表式で像 (3.11) を具体的に表すと

$$
\begin{aligned}
D'a &= f^0_*(U^{-1}\circ D(U\circ f^{0*}a\circ U^{-1})\circ U) \\
&= f^0_* D(f^{0*}a)+[f^0_*(U^{-1}\circ DU),a] \\
&= f^0_*\nabla^L(f^{0*}a)+\frac{i}{\hbar}[f^0_*\hat{\gamma},a]+[f^0_*(U^{-1}\circ DU),a]
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

となる。従って、D' を再び (3.12) の形で $\nabla^{L'}$、$\hat{\gamma}'$ のペアで分けて表示するならば、

$$
\begin{aligned}
\nabla^{L'} :&= f^0_*\nabla^L f^{0*}, \\
\hat{\gamma}' &= f^0_*\left(U^{-1}\circ\hat{\gamma}\circ U-i\hbar U^{-1}\circ\nabla^L U+\hbar C_\gamma\right)-\hbar C_{\gamma'}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

となる。ここで、$\hbar C_\gamma,\hbar C_{\gamma'}\in Z\otimes\wedge^1$ はそれぞれ $\hat{\gamma}$、$\hat{\gamma}'$ の center 分の不定性をあからさまに書いたもので、必ず $\hbar$ を含むのでくくり出してある（この様に分けること自体は常に可能であり、その時 $\hat{\gamma}$ は center 分の不定性を持つことは既に述べた）。特に、f が恒等写像でその symplectic lifting が自明な lifting $\sigma_f(x)^i{}_j=\delta^i_j$ のとき、言い換えると $f^0_*=\mathrm{id}$ としたとき、∇^L は不変である。一方 $\hat{\gamma}$ の方は確かに、U によるゲージ変換による、かつ固定した ∇^L の下での connection 1-form の変換性を持っている。そこで、Weyl bundle のゲージ変換を以下で定義することにする。

> **定義 3.2** f が恒等写像でその symplectic lifting が自明なとき、つまり $f^0_*=\mathrm{id}$ のとき、(3.10) の自己同型 A_f を A と書き、$W(L,\mathcal{A})$ の Weyl ゲージ変換であると言う。即ち、
>
> $$
> \begin{aligned}
> &A\ :\ a\mapsto U^{-1}\circ a\circ U,\qquad a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge, \\
> &U=\exp_\circ\left(\frac{i}{\hbar}H\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{i}{\hbar}H\right)^k,\ H\in W_3''(L,\mathcal{A})
> \end{aligned}
> \tag{3.15}
> $$

実際、この変換の無限小部分 $W_3''(L,\mathcal{A})=W_3'(L,\mathcal{A})\oplus\hbar\mathcal{A}$ は、$\circ$ 積の交換子の下でベクトル空間として無限次元の Lie 代数を成し、特にその最低次に通常の Lie 代数 $\mathcal{A}$ を含んでいる。従って、A は元の $\mathcal{A}$ の対称性を無限次元に拡張したゲージ変換であると解釈できる。そしてこの Weyl ゲージ変換のゲージ場が $\hat{\gamma}$ になっているわけである。もちろん自己同型 A_f 全体を考えるなら、(3.12) で ∇^L と $\hat{\gamma}$ を分けたのは convention に過ぎない。しかし、$f^0_*=\mathrm{id}$ として ∇^L を固定する場合には分けた意味が出てくる。我々は通常のゲージ変換 $\mathcal{A}$ の方に注目するので、∇^L を固定した場合をここではゲージ変換と呼ぶことにする。もし L のゲージ変換も含めた全ての fiberwise な変換全体をゲージ変換と呼ぶとすると（Rieamnn 多様体の意味ではないが）spin connection の自由度が入るため重力も含められることになる。そのとき対応するゲージ場は $\gamma-i\hbar\Gamma_E+\frac{1}{2}\Gamma_{ij}y^iy^j$ となる。但し、そのうち L の部分のゲージ変換性は (3.15) の形ではなく、もっと複雑である。

3.1.2 $\wedge W_D$ の同型と、同値な $*$ 積

ここまでは Weyl bundle $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の自己同型や、それと Weyl connection D との関係を見てきたが、この節では、特に D が Abelian connection の場合を考える。このときは代数 W_D あるいは $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A},*)$

という特別な部分代数があるので、それらに及す効果を見てみる。

一般の connection と同様に、任意の自己同型写像 A_f (3.10) の下で、Abelian connection D の場合もその像

$$D'a := A_f D(A_f{}^{-1}a) \tag{3.16}$$

に写るが、この D' は再び Abelian connection である。なぜなら、$D^2a = 0$ ならば $(D')^2a = A_f D^2(A_f{}^{-1}a) = 0$ であるから（Weyl 曲率 Ω の言葉で言うと、自己同型で center は center に写るから、とも言える）。このことから、以下のことが言える。

命題 3.3　写像 A_f の定義域を $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ から $\wedge W_D$ に制限することにより、同型 $A_f : \wedge W_D \to \wedge W_{D'}$ が導かれる。更にこの同型は２つの $*$ 積の同値を導く。

実際、定義域を $\wedge W_D$、つまり $Da = 0$ を満たす a に制限すると、この写像の下で $D'a' = D'(A_f a) = A_f(Da) = 0$ が成り立つので、命題の前半はすぐに示せる。もちろん、この同型のうち 0-form 部分 W_D を取り出しても同型なので、W_D と $*$ 積が一対一に対応することを思い出せば、２つの $*$ 積の代数の同型、つまり $*$ 積の同値性も明らかであるが、具体的に同値性を確かめよう。以下の可換図式で表される写像 T を定義する。

$$\begin{array}{ccc}
(W_D,\circ) & \xrightarrow{A_f} & (W_{D'},\circ) \\
{\scriptstyle Q}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle Q'} \\
(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A},*) & \xrightarrow{T} & (C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A},*')
\end{array}$$

縦の写像は W_D と $*$ 積の代数 $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ の同型を表すが、Abelian connection が異なれば $*$ 積も異なることに注意する。W_D に限れば $\sigma = Q^{-1}$ であるので、写像 T は

$$\begin{aligned}
T: \quad & C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A} \to C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A} \\
& a_0 \mapsto Q'^{-1}A_f Q(a_0)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

と書くことができる。この T に対し、$*$ 積の定義 (2.33) を用いると[5]、

$$Ta_0 *' Tb_0 = T(a_0 * b_0) \tag{3.18}$$

が成立することを示すことができる。つまり $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A},*)$ と $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A},*')$ は同型である。従ってこの写像 T は**定義 2.3** の $*$ 積の同値を与える写像に他ならない[6]。以上のことから、与えられた１つの $*$ 積に対し、$W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ の自己同型 A_f ごとにそれと同値な $*$ 積が存在することがわかった。

上の議論をもう少し詳しく (3.12) の $\hat\gamma$ の言葉で見直そう。自己同型 A_f が与えられたとき、それにより写り合う２つの Weyl connection の関係は (3.14) で与えられているが、そこから以下の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned}
DU &= U\circ\frac{i}{\hbar}\left(f^{0*}\hat\gamma' - \hat\gamma + \hbar(f^{0*}C_{\gamma'} - C_\gamma)\right) \\
\Omega' &= f^0_*\Omega + \hbar d(f^0_*C_\gamma - C_{\gamma'}) \\
\Omega'_0 &= f^0_*\Omega_0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

[5] $Ta_0 *' Tb_0 = \sigma(Q'\sigma A_f Q(a_0)\circ Q'\sigma A_f Q(b_0)) = \sigma(A_f Q(a_0)\circ A_f Q(b_0)) = \sigma A_f(Q(a_0)\circ Q(b_0)) = \sigma A_f Q(a_0 * b_0)$

[6] $*$ 積の同値性の一般論は [16] が詳しい。

1行目は (3.14) の第2式を単に書き換えただけである。2行目は (3.14) から Weyl 曲率を計算したもので、3行目はそのうち最低次の $\hbar=0$ 成分を取り出した[7]。ここで特に D が Abelian connection のときは、D' も Abelian であるから Ω、Ω' は共に center の元であり、これに作用する f^{0*} は通常の push-forward に一致する。また Abelian connection は δ を必ず含んでいるため、Hodge-de Rham 分解を用いて第1式は更に次のようにも書き直せる。

$$U=\sigma(U)+\delta^{-1}\left((D+\delta)U-\frac{i}{\hbar}U\circ\left(f^{0*}\hat{\gamma}'-\hat{\gamma}+\hbar(f^{0*}C_{\gamma'}-C_{\gamma})\right)\right) \tag{3.20}$$

これらから2つの Abelian connection D、D' を繋ぐ自己同型 A_f の存在するための必要条件が読み取れる。第3式は、symplectic form Ω_0 が通常の push-forward 以外の変換を受けないことを表している。第2式の Weyl 曲率の関係については、その差が $\hat{\gamma}$ の不定性から来る exact central 2-form 分であることを意味している。これは Ω' が $f^0_*\Omega$ と同じ $H^2(M)[[\hbar]]$ の cohomology class に入るということと等価である。これらが A_f が存在する時の帰結である。

では逆に、任意の2つの $*$ 積はいつ同値になるのか、言い換えると任意の2つの Abelian connection を繋ぐ A_f はいつ存在するのか、ということが問題になる。それが解れば非同値な $*$ 積を分類することが可能になる[8]。実は A_f のうちの $f=$id. なる fiberwise な自己同型に関しては、上の必要条件は十分条件でもあることが示されている。即ち、

定理 3.4 2つの Abelian connection を D、D' とする。このとき W_D を $W_{D'}$ に写すような fiberwise な自己同型 A_f は、Weyl 曲率 Ω、Ω' が同じ cohomology class に属し、かつその最低次が一致するときに限り存在する。

これを示すには、2つの条件を満たすときに A_f ($f=$id.) の存在が言えれば良い。それを簡単に説明する[9]。まず $\Omega'_0=\Omega_0$ なので2つの bundle の同型 $\theta,\theta':TM\to L$ から symplectic 同型 $\rho=\theta'\theta^{-1}:L\to L$ が作れる。次に、(3.20) は U を与えた時の $\hat{\gamma}'$ を定める式であるが、逆に U に関する方程式と見ると、与えられた $\sigma(U)$、$\hat{\gamma}$、$f^0_*\hat{\gamma}'$ に対して U を一意的に定める（ここで $f^0_*\hat{\gamma}'$ は $\rho=\theta'\theta^{-1}$ による変換とする)。従って σ と $U\in W^+$ が定まるので A_f が存在するという流れである。一般の A_f の場合にも同様に必要十分条件が求まると思われる。いずれにしても、2つの同値な $*$ 積は、Weyl bundle で見れば diffeomorphism （とその symplectic lifting）と Weyl ゲージ変換の組み合わせにより結びついていることがわかる。

3.1.3 非可換ゲージ変換としての $_{\Lambda}W_D$ の自己同型

前節では $W(L,A)\otimes\Lambda$ の任意の自己同型 A_f が同型 $A_f:{}_{\Lambda}W_D\to{}_{\Lambda}W_{D'}$ を引き起こすことを見たが、この節ではその特別な場合として、$_{\Lambda}W_D$ の自己同型を考察する。つまり、A_f の定義域を $_{\Lambda}W_D$ に制限した時にその像も $_{\Lambda}W_D$ である場合のことである。そのような A_f は、$W(L,A)\otimes\Lambda$ 上で Abelian connection D の像が

[7] 1行目に D を作用させても得られる。

[8] Fedosov の変形量子化の言葉を用いた $*$ 積の分類問題については [19] を参照。そこでは Hochschild cohomology と $\hbar$ で変形した de Rham cohomology は同型 $H^k(W_D,W_D)\simeq H^k(M)[\hbar,\hbar]]$ で、特性類は $\frac{1}{\hbar}\Omega$ で与えられることを示している。

[9] 証明はそれほど簡単ではない。詳細は [4] 参照。

自身に戻るという条件

$$Da = A_f D {A_f}^{-1} a, \qquad \forall a \in W(L,\mathcal{A}) \otimes \wedge \tag{3.21}$$

つまり D を保存する条件により定まる。このような 2 つの A_f の写像の合成は再び ${}_\wedge W_D$ の自己同型であるから、(3.21) を満たす A_f の全体は、$W(L,\mathcal{A}) \otimes \wedge$ の自己同型全体の部分群を成す。また、明らかに ${}_\wedge W_D$ の自己同型の下で $*$ 積は不変である。つまり、(3.17) の写像 T は $D' = D$ より

$$\begin{aligned} T \quad : \quad & (C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *) \to (C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *) \\ & a_0 \mapsto Q^{-1} A_f Q(a_0) \end{aligned} \tag{3.22}$$

という $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ の中での変換になり、(3.18) は今の場合は $T(a_0 * b_0) = Ta_0 * Tb_0$ となる。

では、条件 (3.21) を満たす A_f とは具体的にどのようなものかを調べよう。(3.12) の表示で言うと、D を不変に保つというのは

$$\nabla^{L'} = \nabla^L, \qquad \hat{\gamma}' + \hbar C_{\gamma'} = \hat{\gamma} + \hbar C_\gamma \tag{3.23}$$

に他ならない。従って (3.14) に代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla^L &= f^0_* \nabla^L f^{0*}, \\ \hat{\gamma} &= f^0_* \left(U^{-1} \circ \hat{\gamma} \circ U - i\hbar U^{-1} \circ \nabla^L U + \hbar C_\gamma \right) - \hbar C_{\gamma'} \end{aligned} \tag{3.24}$$

これらを満たすような f^0_* と U が定める A_f が、${}_\wedge W_D$ の自己同型である。従って、${}_\wedge W_D$ の可能な自己同型は以下のように特徴付けられる。まず (3.23) の第 1 式に対しては、symplectic lifting ρ を

$$\Gamma(f(x))^m{}_{lk} (f^{0*}\theta^k) = \Gamma(x)^m{}_{lk} \theta^k - \left((d\rho)\rho^{-1} \right)^m{}_l \tag{3.25}$$

を満たすようにとれば良い。第 2 式からは (3.19) と同様にして

$$\begin{aligned} & DU = U \circ \frac{i}{\hbar} \left(f^{0*}\hat{\gamma} - \hat{\gamma} + \hbar (f^{0*} C_{\gamma'} - C_\gamma) \right) \\ & f^{0*}\Omega = \Omega + \hbar d(C_\gamma - f^{0*} C_{\gamma'}) \\ & f^{0*}\Omega_0 = \Omega_0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

が得られる。第 3 式は diffeomorphism f が M の symplectic form Ω_0 を保つことを意味している。つまり A_f が ${}_\wedge W_D$ の自己同型であるためには、底空間への作用 f は M の symplectomorphism である必要がある。

拡張する前の Weyl bundle W の場合には実はその逆も成り立つ。即ち、与えられた symplectomorphism f に対し、A_f が ${}_\wedge W_D$ の自己同型になるような U が必ず決まることが示されている。つまり、そもそもの量子化の言葉で言うと、古典的な正準変換に対して必ずそれを変形した量子論的な正準変換が存在することを意味している。今の我々の解釈では、これは自己同型 A_f の中には可換な座標変換に付随する非可換的な座標変換に当たるものが入っていることを表している。但し、$W(L,\mathcal{A})$ では同じことが成り立つとは限らない。それは、

一般に lifting ρ、v に対する obstruction がありうるからである。それでも A_f が非可換的な座標変換を含むというのは確かである。

以下では更に状況を限定し、$W(L,\mathcal{A})\otimes\bigwedge$ の自己同型 A_f を Weyl ゲージ変換 A に制限した場合を考える。$W(L,\mathcal{A})\otimes\bigwedge$ の自己同型うち、fiberwise でかつ symplectic lifting を自明に固定したものが Weyl ゲージ変換であった。それに対応して以下ように定義する。

定義 3.5 $W(L,\mathcal{A})\otimes\bigwedge$ の Weyl ゲージ変換 A が Abelian connection D を保存するような $\bigwedge W_D$ の自己同型写像であるとき、それを $\bigwedge W_D$ の非可換ゲージ変換と呼び、A_D と書く。

言い換えると、上の $\bigwedge W_D$ の自己同型全体のうちの f^{0*} =id. なるものを非可換ゲージ変換と呼ぶのである。もちろん、定義から非可換ゲージ変換は（無限次元の）Weyl ゲージ変換群の部分群を成している。更に、このように定義しておくと、特に考えている $*$ 積が Moyal-Weyl 積の場合には、知られている非可換ゲージ変換に一致する。その理由は以下の性質に拠る。

命題 3.6 非可換ゲージ変換 $A_D:\bigwedge W_D\to\bigwedge W_D$ は locally inner である。即ち、任意の点 $x\in M$ の周りで $a\in\bigwedge W_D$ の変換性が

$$A_D: a\mapsto a=V^{-1}\circ a\circ V,\qquad V\in W_D \tag{3.27}$$

と表せる近傍が存在する。

つまり、U 自身が flat section になるということがこの命題の主張である[10]。この証明を簡単に見ておこう。まず、$\bigwedge W_D$ の自己同型 (3.23) から再び出発し、許される A の条件を求める。Weyl ゲージ変換 A の場合は (3.23) の第 1 式は自動的なので、条件は第 2 式に限られる。それは、γ は A の下で center の不定性を除いて不変であれ、という条件である。この条件を満たす U は (3.26) で f^0_* =id. としたもの

$$DU=iU(C'_\gamma-C_\gamma) \tag{3.28}$$

で特徴付けられる。ここで右辺には γ、γ' の不定性のみが現れている。これを満たす U が非可換ゲージ変換を引き起こす U であるが、それがこの式を漸化式形にした形から center $(C'_\gamma-C_\gamma)$ を与えると一意的に決まるのは、これまでの議論と同様である。今は一般の自己同型 A_f の議論から状況を制限して導いたが、この式 (3.28) だけならば始めから Weyl ゲージ変換の枠内で考えればより容易に得られる。つまり、Weyl ゲージ変換後も $\bigwedge W_D$ の元であれ、という条件は $Da=0$ に対し $Da'=D(U^{-1}\circ a\circ U)=\frac{i}{\hbar}[U\circ DU^{-1},a]=0$ であるが、これは $U\circ DU^{-1}$ が center であれ、という条件であり、直ちに (3.28) に帰着するからである。ともかく、この (3.28) で右辺の center が 0 のときは $DU=0$ より $U\in W_D$ となる。これは大域的に正しい。一方、$(C'_\gamma-C_\gamma)$ が 0 でないときは、この式に D を作用させると、$d(C'_\gamma-C_\gamma)=0$、つまり closed 1-form になる。このことから、局所的には Poincaré lemma より、ある center の関数 $\varphi_\gamma\in Z_2$ を用いて $C'_\gamma-C_\gamma=d\varphi_\gamma$ と書ける[11]。こ

[10]実はこの命題自身は A_D だけでなく L のゲージ変換を含めた fiberwise な自己同型が $\bigwedge W_D$ を保つ時に成り立つ [4]。
[11]φ_γ は次数 2 以上の Z_2 の元であることに注意。

の関数の自由度は、実は U の方の不定性に対応しているので[12]、$V := U\exp(-i\varphi_\gamma)$ と再定義することにより取り除ける。この V は $DV = D(U\exp(-i\varphi_\gamma)) = iU(C'_\gamma - C_\gamma)\exp(-i\varphi_\gamma) + U(-id\varphi_\gamma)\exp(-i\varphi_\gamma) = 0$ より W_D の元になる。よって、命題が示された。以後 V と書くときは常に上のように不定性を固定したものを指す。

さて、この命題により、V には（局所的には）対応する $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ の元が存在するので、(3.27) を σ を用いて $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ 上に射影すると、

$$A_D : a_0 \mapsto V_0^{-1} * a_0 * V_0 \tag{3.29}$$

と書ける。ここで $a_0 = \sigma(a)$、$V_0 = \sigma(V)$ は $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ の元である。一般の Weyl ゲージ変換 U の場合と違い、この場合は変換自体も $*$ 積を用いて表せるわけである。これはいわゆる非可換 Yang-Mills 理論のゲージ変換性を一般の $*$ 積で置き換えたものになっているため、我々の**定義 3.5** は知られている変換性の自然な拡張であることを示している。よって、$\wedge W_D$ の非可換ゲージ変換 A_D のことを $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}, *)$ の非可換ゲージ変換とも呼ぶ。但し、Moyal-Weyl 積のように M が一つの近傍で覆えてしまう場合には、上の表式 (3.29) が局所的だけでなく大域的に正しいが、一般には局所的にしか意味を持たないことに注意する。これは全てを $*$ 積だけで考えることには限界があることを示している。一方、W_D で物事を議論する限り、(3.27) が局所的にしか成り立たないというのは特定の表示の話に過ぎず、locally inner に拘らなければ大域的な表式を用いれば良い。この違いは次の節でも非常に効いてくることになる。また、$C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ では $*$ 積の定義から明らかなように、非可換ゲージ変換 (3.29) は一般に、$\hbar$ の高次に無限個の微分を含む変換になっているため、$\hbar$ の高次に関する座標変換を含んでいる。これが先に非可換座標変換と言っていたものである。よって、ゲージ変換なのに局所変換性ではないように思える。しかし、$C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ ではもはや点の概念すら無くなっているので、局所的か否かを判定することさえできないため、矛盾ではない。しかし、$\wedge W_D$ では非可換ゲージ変換 A_D とは本当に fiberwise な局所変換であるため、ゲージ変換と呼ぶにふさわしい。この点からも、W_D で全てを定義することのご利益が感じられるのではないだろうか。

3.2 非可換ゲージ場の定義

前節では $W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ 上の Weyl ゲージ変換 A と、$\wedge W_D$ 上の非可換ゲージ変換を定義した。この節ではそれぞれ対応するゲージ場について調べる。特に非可換ゲージ場を定義するのが目標である。

3.2.1 Weyl ゲージ場

まず、$W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge$ 上の Weyl ゲージ変換に対応する Weyl ゲージ場 $\hat{A}$ を導入する。

ここまでは、主に Abelian connection という特別な Weyl connection を考えてきた。§2.3 では Abelian connections D を (2.24) の形で与え、§3.1 では Weyl bundle の自己同型 A_f (3.10) が Abelian connection D に関する flat section の空間 W_D 達の同型を導くことを見た。しかし、一般には (2.21) の D は connection と

[12] U の不定性も次数 2 以上の center $\Delta H \in Z_2$ から成る。

しては任意で、別に Abelian である必要はないし、(3.10) の自己同型 A_f (3.10) 自身も W_D に無関係に定義されていた。既に見てきたように、もし Weyl bundle をゲージ理論として物理的な対象と捉えるならば、Weyl connection D の中のゲージ場は力学変数として扱われ、あらゆる配位をとりうる。言い換えると、Weyl ゲージ場について経路積分するということになる。また、このとき自己同型 A_f は系の対称性と見なされる。特に我々は (3.15) の Weyl ゲージ変換 A に限って考えているので、その場合の力学変数は (3.12) の $\hat{\gamma}$ ということになる。以後、ある固定した Abelian connection を今まで通り D と書き、一般のダイナミカルに変化する Weyl connection の方を単にそれと区別するために $\mathcal{D}$ と書くことにする。またそれに対応して、$\mathcal{D}$ に含まれる Weyl ゲージ場を $\hat{A}$ と記す。即ち、Weyl ゲージ変換に対する共変外微分 $\mathcal{D}: W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^p \to W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^{p+1}$ は

$$\mathcal{D}a = \nabla^L a + \frac{i}{\hbar}[\hat{A}, a] \tag{3.30}$$

と表される。ここで、Weyl ゲージ変換が L のゲージ変換の自由度を含まない定義であることから、∇^L を分離し、$\hat{A}$ を力学変数と考えている。また、$\hat{A}$ は $\hat{\gamma}$ を記号を変えて表しただけなので、その取りうる配位は $\hat{\gamma}$ と同じく $\hat{A}\in W'(L,\mathcal{A})\otimes\wedge^1$ である。同様に以下の式は全て、以前の §§2.3.3 での結果の焼き直しに過ぎない。まず、$\mathcal{D}$ の Weyl 曲率 2-form を $\hat{F}$ と記すと、それは通常通り

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^2 a &= \frac{i}{\hbar}[\hat{F}, a], \quad \forall a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge,\\ \hat{F} &= \frac{1}{2}R_{ij}y^i y^j + \nabla^L\hat{A} + \frac{i}{\hbar}\hat{A}\circ\hat{A}\end{aligned} \tag{3.31}$$

により、固定した ∇^L の曲率と $\hat{A}$ の field strength の和で与えられる。Weyl ゲージ変換 A (3.15) の下で、$\mathcal{D}$ はその像に

$$\mathcal{D}'a = A\mathcal{D}A^{-1}a, \quad \forall a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\wedge \tag{3.32}$$

のように写るが、∇^L が不変であることに注意しこれを Weyl ゲージ場 $\hat{A}$ と曲率 $\hat{F}$ の変換性で表すと、以下のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{A}' &= U^{-1}\circ\hat{A}\circ U - i\hbar U^{-1}\circ\nabla^L U + \hbar C_A - \hbar C_{A'},\\ \hat{F}' &= U^{-1}\circ\hat{F}\circ U + d\hbar(C_A - C_{A'})\end{aligned} \tag{3.33}$$

ここで $\hbar C_A\in Z\otimes\wedge^1$ は $\hat{A}$ の不定性である。このうち特に、Weyl 曲率が center の元 $\hat{F}\in Z\otimes\wedge^2$ に属するときには全ては §§2.3.3 の場合に帰着する。即ち、そのような $\hat{A}$ は Abelian connection の配位になる。

3.2.2 非可換ゲージ場

上では、Weyl bundle の section 全体を場の理論の積分領域と考えるときの話をしたが、本来は、固定した Abelian connection D に対し、その flat section の代数 $\wedge W_D$ または $*$ 積の入った関数代数 $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ が我々の注目している非可換代数（非可換空間）であった。つまり、場の理論の定義されている場の空間は $\wedge W_D$ とすべきである。そして非可換ゲージ変換 A_D がその系の対称性と見なされる。ここでは、これらに対応す

る非可換ゲージ場を導入する。非可換ゲージ変換が Weyl ゲージ変換の自由度の一部であることから、非可換ゲージ場は Weyl ゲージ場 $\hat{A}$ の適当な制限によって得られることになる。

それを見る前に、より都合の良い変数で (3.30) を書き直しておこう。$\hat{A} \to \hat{A}_\gamma + \hat{\gamma}$ という置き換えにより、Weyl connection $\mathcal{D}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{D}a &= Da + \frac{i}{\hbar}[\hat{A}_\gamma, a], \\ \hat{A}_\gamma &:= \hat{A} - \hat{\gamma} \end{aligned} \tag{3.34}$$

とも表示することができる。この表式は $\mathcal{D}$ を、背景場としての固定した Abelian connection D [13]と、その周りの揺らぎ $\hat{A}_\gamma$ に分けたことに相当する。しかし D をくくり出す替わりに力学変数を $\hat{A}$ から $\hat{A}_\gamma$ に置き換えただけであり、$\mathcal{D}$ 自体の内容は元のままである。つまり、$\hat{A}_\gamma$ の経路積分をすれば ∇^L を固定したときのあらゆる $\mathcal{D}$ のとりうる領域をカバーしている。一般に Weyl ゲージ変換 A の下でこの背景 D は別の背景 D' に写るが、(3.14)(3.33) を用いると、$\hat{A}_\gamma = \hat{A} - \hat{\gamma}$ という組み合わせは center を除いて共変に変換することがわかる。

$$\hat{A}'_\gamma = U^{-1} \circ \hat{A}_\gamma \circ U + \hbar C, \quad C = C_A - C_\gamma \tag{3.35}$$

また、この表示での曲率 2-form は以下のようになる。

$$\hat{F} = \Omega + D\hat{A}_\gamma + \frac{i}{\hbar}\hat{A}_\gamma \circ \hat{A}_\gamma \tag{3.36}$$

もちろんこれは (3.31) の $\hat{F}$ に等しいが、背景である Abelian connection D の Weyl 曲率 Ω があらわに現れており、より示唆的である。

これ以降は、この節の冒頭で述べたように、場の空間を $W(L,\mathcal{A}) \otimes \wedge$ から $\wedge W_D$ に制限する。任意の flat section $a \in \wedge W_D$ に対し、(3.34) の表式で表した $\mathcal{D}$ の作用は $Da = 0$ なので

$$\mathcal{D}a = -i[\hat{A}_\gamma, a], \quad \forall a \in \wedge W_D \tag{3.37}$$

と表される。ここで $\hat{A}_\gamma$ の中の $\hat{\gamma}$ の部分が、消えた D の中の微分の役割を果たしていることに注意する。それは $\wedge W_D$ に限っては $Da = 0$ より $\nabla^L a = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\gamma}, a]$ が成り立つからである。これにより、$\mathcal{D}$ は $\wedge W_D$ への作用としては $W(L,\mathcal{A}) \otimes \wedge$ の inner graded derivation の形にまとまる。非可換ゲージ変換 A_D は背景 D を保存するため、(3.35) から明らかに $\mathcal{D}$ は非可換ゲージ変換の下で共変に変換する。従って $\mathcal{D}$ は共変外微分の必要条件を満たしている。

しかしそれ以前に、これは $\wedge W_D$ の空間では一般に閉じていない。つまり $a \in \wedge W_D$ であっても $\mathcal{D}a \in \wedge W_D$ とは限らないのである。従って、非可換ゲージ変換が $\wedge W_D$ の自己同型として作用していることに対応するためには、$\mathcal{D}$ が $\wedge W_D$ 上で閉じた作用であることを要請する必要がある。そこで、

定義 3.7 Weyl bundle $W(L,\mathcal{A}) \otimes \wedge$ 上の Weyl connection $\mathcal{D}$ が $\wedge W_D$ 上の graded derivation であるとき、$\mathcal{D}$ は $\wedge W_D$ 上の非可換ゲージ変換 A_D の共変外微分（非可換共変外微分）であるという。

[13]背景 D は ∇、μ、Ω により決まっていた。

このように定義する。$\mathcal{D}$ 自身は既に $\circ$ 積に関する graded derivation であるので、「$_\wedge W_D$ の」という部分が上の定義の要請している部分である。$\mathcal{D}$ を Weyl ゲージ場 $\hat{A}_\gamma$ で表せば、この要請は $\hat{A}_\gamma$ の取りうる範囲に対する制限になるので、それを満たすような $\hat{A}_\gamma$ のことを非可換ゲージ場と呼べば良いように思える。実際、$\mathcal{D}$ が $_\wedge W_D$ の graded derivation であるための必要十分条件を $\hat{A}_\gamma$ の制限として表すと、

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D} \text{が} {}_\wedge W_D \text{の graded derivation である} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{D}({}_\wedge W_D) \subseteq {}_\wedge W_D \\
&\Leftrightarrow D\mathcal{D}({}_\wedge W_D) = 0 \\
&\Leftrightarrow D(\mathcal{D}a) = \frac{i}{\hbar}D[\hat{A}_\gamma, a] = \frac{i}{\hbar}[D\hat{A}_\gamma, a] = 0, \ \forall a \in {}_\wedge W_D \\
&\Leftrightarrow D\hat{A}_\gamma \in Z \otimes \wedge^2
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

となる。ここで最後の同値には、任意の flat section と可換なもの（$_\wedge W_D$ の $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ での centralizer）は center しか無いことを用いた。この最後の条件式の central 2-form を $D\hat{A}_\gamma =: \Theta$ と書こう。両辺に D を作用させれば明らかなように、Θ は closed $d\Theta = 0$ である。この関係式 $D\hat{A}_\gamma = \Theta$ をもって非可換共変外微分を特徴付けることができる。

さて、$\hat{A}_\gamma$ がこの条件を満たすとき、$\mathcal{D}$ の Weyl 曲率は (3.36) より $\hat{F} = \Omega + \Theta + \frac{i}{\hbar}\hat{A}_\gamma \circ \hat{A}_\gamma$ であるから、明らかに $D\hat{F} = 0$ を満たす。実際、Ω, Θ が closed かつ center であることに注意すると、直ちに $D\hat{F} = d\Omega + d\Theta + \frac{i}{2\hbar}[\Theta, \hat{A}_\gamma] = 0$ が得られる。従って

$$
\hat{F} \in {}_\wedge{}^2 W_D \tag{3.39}
$$

となるが、これは場の空間を $_\wedge W_D$ としたときの曲率に $\hat{F}$ がなっていることを正に意味している。逆にこれで非可換共変外微分を特徴付けても良い。このうち (3.37) の $\mathcal{D}$ を 2 回作用させた時に現れる部分 $\hat{F}_\gamma := \frac{i}{\hbar}\hat{A}_\gamma \circ \hat{A}_\gamma$ を非可換共変外微分の曲率と呼ぶ。

では、上で特徴付けられる $\mathcal{D}$ のうち、非可換ゲージ場の自由度はどの部分であろうか？ 既に指摘したように $\hat{A}_\gamma$ には微分の自由度も含まれているため、それを除いた部分をゲージ場の自由度と見なさなければならない。ここでは Θ の自由度がその微分に相当し、残った自由度が非可換ゲージ場に対応すると考える。

定義 3.8 $_\wedge W_D$ 上の非可換ゲージ変換 A_D に対応する非可換ゲージ場とは、Weyl ゲージ場 $\hat{A}_\gamma$ のうち、closed central 2-form $\Theta(\in Z \otimes \wedge^2,\ d\Theta = 0)$ を固定したときに、関係式

$$
D\hat{A}_\gamma = \Theta \tag{3.40}
$$

を満たす residual な自由度のことである。

しかし我々のこれまで用いてきた言葉だけでこれが自然な定義であることを説明することは出来ない。以下の議論により我々の共変外微分の特徴付けと、非可換ゲージ変換の特徴付け命題 3.6 とは対応関係がある。$d\Theta = 0$ であるから局所的には、ある $\Phi \in Z \otimes \wedge^1$ が存在して $\Theta = d\Phi$ と書けるので、(3.40) は $D(\hat{A}_\gamma - \Phi) = 0$、つま

り $\hat{A}_\gamma - \Phi \in \wedge^1 W_D$ を意味する。これを $\hat{A}_\gamma = \Phi + \Psi$, $\Psi \in \wedge^1 W_D$ と書くと、演算子 $\frac{i}{\hbar}[\hat{A}_\gamma,\ ] = \frac{i}{\hbar}[\Phi + \Psi,\ ]$ の中の Φ は center であるから Ψ の項しか効かない。従って、$\mathcal{D} = \frac{i}{\hbar}[\hat{A}_\gamma,\ ]$ は $\wedge W_D$ の locally inner gdaded derivation になっている。これは無限小非可換ゲージ変換が locally inner derivation であることの類似である。しかし、線形空間としての自由度は $\wedge^1 W_D$ と W_D では異なるため、通常のゲージ場の見方では非可換ゲージ場とゲージ変換が対応していないように見える。一方、局所的に考えないとすると $D\hat{A}_\gamma = \Theta$ を $\hat{A}_\gamma$ について解いた一般解は $\hat{A}_\gamma = D^{-1}\Theta + \Psi$ の形をしている。ここで第1項は D を作用させたとき Θ を出す特解で、第2項は上の Ψ と同じく $\wedge^1 W_D$ の元で、D の作用で0を出す residual な項である。これを演算子 $\frac{i}{\hbar}[\hat{A}_\gamma,\ ]$ の言葉で言うと、第1項は outer で第2項は inner な graded derivation となる。一般に非可換幾何では、代数の outer derivation は関数環の vector 場の類似であるから、diffeomorphism を生成する微分演算子と見なし、inner derivation はゲージ自由度と考えるため、上の定義は自然である。実はこの困難は、関数と微分形式の以下のような違いから来ている。

これまでも再三述べてきたように、可換な空間 M 上の（非可換な）代数 $\wedge W_D$ で考えている限り、非可換ゲージ理論といってもそれほど特殊なものではない。即ち、非可換性は全て fiber に押し込められている。しかし、それと等価であるはずの $*$ 積の入った $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ で物事を見るには少し問題がある。それは、D の cohomology が自明であるというところで既に述べたように、$W_D = \wedge^0 W_D$ は $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ に同型対応が与えられているが、$\wedge W_D$ 全体と $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の関係には何も触れられていないからである。即ち、関数代数 $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ に付随する微分代数 $\Omega(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A})$)、言い換えると微分形式に対する $*$ 積が与えられていない。よって、上の定義をそのまま $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の言葉に置き換えることはできないわけである。

これに対し我々のとりうる策は少なくとも2つある。1つは上の定義を尊重し、$\wedge W_D$ の対応物となる微分代数を $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の方にも与える、つまり、微分形式の間の $*$ 積を新たに定義することである。もう1つは $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の方を尊重し、これまでの $*$ 積だけを用いるような微分代数を定義する方法である。それは全ての微分形式をある基底で展開し、その成分が $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の関数であるような微分代数を構成すればよい。前者は $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ 側に対する概念の拡張が必要で、後者は上の定義に現れる場の空間を $\wedge W_D$ ではなく、より制限した空間にする必要がある。実は、通常の非可換微分幾何で考える微分代数は、後者の方針に非常に近い。また、物理でもゲージ場などは成分で書かれてしまうことがほとんどで、これまでの非可換ゲージ理論でも、形式までは全く考えられていなかった[14]。従って以下では我々は第二の方針で考えることにする。この場合には非可換ゲージ場の線形空間としての自由度が $\mathcal{A}$ と同じ有限自由度であることが具体的にわかり、通常のゲージ理論を素直に拡張したものになっている。

3.3 非可換ゲージ理論の構成

ここでは前節で述べた方針に従い、具体的に非可換ゲージ場に対応する共変微分を構成する。まず、場の空間として、各成分が $*$ 積を持つような $\wedge W_D$ の部分代数を定義し、そこで garaded derivation であれという条件を検証する。その結果、共変微分には非可換ゲージ場の自由度と、非可換空間における微分演算子に相当す

[14]Moyal-Weyl のように flat な底空間であれば、そこまで考えなくても事足りた。

る自由度が含まれることがわかる。特に非可換正準座標系とも呼べる特定の表示をとると、良く知っている共変微分の形に帰着する。

3.3.1 場の空間

可換な関数代数 $C^\infty(M)$ の場合、それに付随する形式の成す微分代数 $\wedge = C^\infty(M, T^*M)$ の元は、T^*M の基底 dx^μ で展開すると、例えば 1-form ならば $a = a_\mu dx^\mu$, $a_\mu \in C^\infty(M)$ というように、その成分が $C^\infty(M)$ であるような表示がとれる。このとき形式同士の積は、成分の通常の積と基底の wedge 積を合わせたもので与えられる。また、$\mathcal{A}$ 値の関数代数 $C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}$ の場合であれば、微分代数は $C^\infty(M, T^*M \otimes \mathcal{A})$ であるが、これは成分だけを $C^\infty(M) \otimes \mathcal{A}$ に置き換えれば良い。これに倣って、$*$ 積を持つ $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の場合にも同じような代数を考えることができる。

まず、$C^\infty(M)$ を $C^\infty(M)[[\hbar]]$ に置き換えることに対応して、基底 dx^μ にあたるものは、任意の $\hbar$ のべきを含んでいても良い。よって、$\wedge^1[[\hbar]] = Z \otimes \wedge^1$ の基底を張る closed 1-forms $\tilde{\theta}^I \in Z \otimes \wedge^1$ $(I = 1, \cdots, 2n)$ を局所的に選んできて固定する[15]。これらは closed でかつ center の元であるから、$\tilde{\theta}^I \in \wedge^1 W_D$ である（つまり $D\tilde{\theta}^I = d\tilde{\theta}^I = 0$ を満たす）ことに注意する。

この局所基底 $\tilde{\theta}^I$ を用いて、場の空間を以下のように定義する。

定義 3.9 $\wedge W_D$ の部分代数 $W_D \otimes \tilde{\wedge}$ を

$$W_D \otimes \tilde{\wedge}$$
$$:= \{a \in W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge \mid a = \sum_{p=0}^{2n} \frac{1}{p!} \tilde{\theta}^{I_1} \wedge \cdots \wedge \tilde{\theta}^{I_p} a_{I_1 \cdots I_p}, \quad a_{I_1 \cdots I_p} \in W_D\} \tag{3.41}$$

と定義し、これを場の空間と呼ぶ。ここで各 $a_{I_1 \cdots I_p}$ の添字は反対称である。

即ち、任意の $W(L, \mathcal{A}) \otimes \wedge$ の元はこの基底 $\tilde{\theta}^I$ を用いて展開することができるが、そのうち特にその成分 $a_{I_1 \cdots I_p}$ が W_D の元であるようなものの全体のことである。$\tilde{\theta}^I \in \wedge^1 W_D$ により、上の元 a は $Da = 0$ を満たすので $\wedge W_D$ の部分空間であることがすぐわかるが、この形の元同士は $\circ$ 積をとってもその形を変えないことから、更に $\circ$ 積の下で $\wedge W_D$ の部分代数になっている。なお、p-form は $W_D \otimes \tilde{\wedge}^p$ と記すことにし、成分が W_D の元であることを忘れないために、以後 $a_{I_1 \cdots I_p} \in W_D$ のかわりに $Q(a_{0I_1 \cdots I_p})$, $a_{0I_1 \cdots I_p} \in C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ とあからさまに書く。また、この部分代数 $W_D \otimes \tilde{\wedge}$ の形式の rank による $\mathbf{Z}$ grading は、$\tilde{\theta}$ の数により与えるものとする[16]。

この $W_D \otimes \tilde{\wedge}$ を場の空間と呼んだ理由は、0-forms W_D と $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}$ の間の同型がすぐさま全ての p-forms $W_D \otimes \tilde{\wedge}^p$ に拡張され、それが我々の欲しい代数になっているからである。実際、0-form の同型を与えていた projection σ により $W_D \otimes \tilde{\wedge}^p$ を射影したとき、得られる空間を $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \otimes \tilde{\wedge}^p$ と書くと、そ

[15] これまでの $\theta^i \in \wedge^1$ と区別するため、違う index I を用いた。
[16] 実際は常に元と同じ次数を与える。

の全体は単に成分だけを $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ に射影した

$$C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde{\wedge}=\{a_0=\sum_{p=0}^{2n}\frac{1}{p!}\tilde{\theta}^{I_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{\theta}^{I_p}a_{0I_1\cdots I_p},\quad a_{0I_1\cdots I_p}\in C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\} \tag{3.42}$$

という集合になる。また $W_D\otimes\tilde{\wedge}$ の $\circ$ 積は、σ により成分同士の $*$ 積と基底の wedge 積を合わせたもの

$$\begin{aligned} a_0*b_0 &= \sum_{p,q=0}^{2n}\left(\frac{1}{p!}\tilde{\theta}^{I_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{\theta}^{I_p}\right)\wedge\left(\frac{1}{q!}\tilde{\theta}^{J_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{\theta}^{J_q}\right)\sigma\left(Q(a_{0I_1\cdots I_p})\circ Q(b_{0J_1\cdots J_q})\right)\\ &= \sum_{p,q=0}^{2n}\left(\frac{1}{p!}\tilde{\theta}^{I_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{\theta}^{I_p}\right)\wedge\left(\frac{1}{q!}\tilde{\theta}^{J_1}\wedge\cdots\wedge\tilde{\theta}^{J_q}\right)a_{0I_1\cdots I_p}*b_{0J_1\cdots J_q} \end{aligned} \tag{3.43}$$

に射影される（これも $*$ と記すことにする）。よって、$C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde{\wedge}$ は、冒頭で述べたような、基底で展開した時に成分が $*$ 積で表されるような代数になっている。なお、0-form $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ でなくても、この場合は projection σ の逆写像が成分に関する写像 Q で定義できるので、それも Q と記す。

$C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ がもはや普通の意味の多様体 M 上の関数代数ではないことと同様に、$C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde{\wedge}$ もまた、普通の意味の微分代数ではない。我々は $C^\infty(M)[[\hbar]]$ を、$\hbar$ で変形された非可換多様体（これを便宜上 $M[[\hbar]]$ とでも書いておこう）の上の関数代数と解釈している。そうすると $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde{\wedge}$ というのは、その非可換多様体 $M[[\hbar]]$ 上の $\mathcal{A}$ 値の形式の代数と見なすことができる。特にその基底 $\tilde{\theta}^I$ が $\hbar$ を含むのは、非可換多様体 $M[[\hbar]]$ 上の cotangent bundle $T^*M[[\hbar]]$ の基底だからである。

このように、$\wedge W_D$ より小さい空間 $W_D\otimes\tilde{\wedge}$ あるいは $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde{\wedge}$ を場の空間と見なしても、全く不自然ではない。

3.3.2 非可換ゲージ場の自由度

上で場の空間を $\wedge W_D$ から $W_D\otimes\tilde{\wedge}$ に制限したことに伴い、非可換ゲージ変換の共変外微分に対してもより強い条件が課されることになる。その条件を求めよう。

そのために、まず $W_D\otimes\tilde{\wedge}$ 上に作用する Weyl connection $\mathcal{D}$ (3.37) を基底 $\tilde{\theta}^I$ を用いて展開する。

$$\mathcal{D}=\tilde{\theta}^I\mathcal{D}_I,\quad \mathcal{D}_Ia=\frac{i}{\hbar}[\hat{A}_{\gamma I},a],\quad \forall a\in W_D\otimes\tilde{\wedge} \tag{3.44}$$

ここで、$\hat{A}_\gamma=\tilde{\theta}^I\hat{A}_{\gamma I}$ である。a も基底で展開された形の元であるから、元の $[\hat{A}_\gamma,a]$ という次数付きの交換子が、$\tilde{\theta}^I$ を先頭にするという convention で、成分にのみに作用する次数なしの交換子に置き換わっている。

さて、今考えている場の空間は $W_D\otimes\tilde{\wedge}$ であるから、定義 3.7 の条件の「$\wedge W_D$ の」という部分を $W_D\otimes\tilde{\wedge}$ に置き換える。そうすると、$\mathcal{D}$ が $W_D\otimes\tilde{\wedge}$ の graded derivation であるための必要十分条件を (3.38) と同様に

求めると、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}\text{が}\ W_D\otimes\tilde{\Lambda}\text{の graded derivation である}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{D}(W_D\otimes\tilde{\Lambda})\subset W_D\otimes\tilde{\Lambda}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{D}_I W_D\subset W_D\\
&\Leftrightarrow \mathcal{D}_I\text{が}\ W_D\text{の derivation である}
\end{aligned}\tag{3.45}$$

により、成分に関する条件に置き換わる[17]。これを更に $\hat{A}_{\gamma I}$ の条件に読み替えると、

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow D(\mathcal{D}_I a)=\frac{i}{\hbar}D[\hat{A}_{\gamma I},a]=\frac{i}{\hbar}[D\hat{A}_{\gamma I},a]=0\ \ \forall a\in W_D\otimes\tilde{\Lambda}\\
&\Leftrightarrow D\hat{A}_{\gamma I}\in Z\otimes\Lambda^1
\end{aligned}\tag{3.46}$$

となる。これを満たす $\hat{A}_{\gamma I}$ が非可換ゲージ変換に対する共変微分を与える。その自由度を調べるため、この左辺を

$$D\hat{A}_{\gamma I}=-\Theta_I\in Z\otimes\Lambda^1\tag{3.47}$$

とおく。この両辺に D を作用させればわかるように、Θ_I は closed $d\Theta_I=0$ ゆえ、局所的には $\Theta_I=d\Phi_I$ を満たす Φ_I が存在する（既に全てが局所的な表式である）。このとき (3.47) は $D(\hat{A}_{\gamma I}+\Phi_I)=0$ となるので、この組み合わせは flat section W_D に属する。よって $\sigma(\hat{A}_{\gamma I}):=\hat{A}_{\gamma 0I}$ とおくと、写像 Q を用いて $\hat{A}_{\gamma I}+\Phi_I=Q(\hat{A}_{\gamma 0I}+\Phi_I)$、つまり

$$\hat{A}_{\gamma I}=Q(\hat{A}_{\gamma 0I}+\Phi_I)-\Phi_I\tag{3.48}$$

と書き直せる。これは $\mathcal{D}_I$ が W_D の inner derivation であることを意味している。即ち

$$\mathcal{D}_I a=\frac{i}{\hbar}[Q(\Phi_I),a]+\frac{i}{\hbar}[Q(\hat{A}_{\gamma 0I}),a],\quad a\in W_D\otimes\tilde{\Lambda}\tag{3.49}$$

と W_D の元のみで書かれた演算子になる。つまり $\mathcal{D}$ が非可換ゲージ場の共変外微分であるという制限により、元々は無限自由度あった $\hat{A}_{\gamma I}$ の自由度は、今や $\Phi_I\in Z$ と $\hat{A}_{\gamma 0I}\in C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ という２種類の関数分の自由度しか残らないことがわかった。Φ_I は後で見るように、$\tilde{\theta}^I$ と合わせて固定した背景 $\hat{\gamma}$ の自由度に対応し、$W_D\otimes\tilde{\Lambda}$ における外微分演算子を与える自由度である。一方 $\hat{A}_{\gamma 0I}$ は元の $\mathcal{A}$ の $U(N)$ ゲージ場と同じ自由度を持ち、後で $\hat{A}_{\gamma 0}:=\tilde{\theta}^I\hat{A}_{\gamma 0I}\in C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde{\Lambda}^1$ が非可換ゲージ場と同定される。

このDを２回施すことにより通常通り曲率が得られる。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}^2 a=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{F}_\gamma,a\right],\qquad \forall a\in W_D\otimes\tilde{\Lambda},\\
&\hat{F}_\gamma=\frac{1}{2}\tilde{\theta}^I\wedge\tilde{\theta}^J\hat{F}_{\gamma IJ}:=\frac{i}{2\hbar}\tilde{\theta}^I\wedge\tilde{\theta}^J\left[Q\left(\Phi_I+\hat{A}_{\gamma 0I}\right),Q\left(\Phi_J+\hat{A}_{\gamma 0J}\right)\right]
\end{aligned}\tag{3.50}$$

ここで、$\hat{F}_\gamma$ は非可換共変外微分 $\mathcal{D}$ の曲率 2-form である。$a\in W_D\otimes\tilde{\Lambda}$ に対してだけでなく、任意の $a\in W(L,\mathcal{A})\otimes\Lambda$ に対して $\mathcal{D}$ を２回作用させた場合は、曲率として $\hat{F}$ (3.31) が得られるが、これと $\hat{F}_\gamma$ は以下の

[17]これは (3.38) より強い条件である。

ように関係していることもわかる[18]。

$$\hat{F} = \hat{F}_\gamma + \Omega + \tilde{\theta}^I \wedge \Theta_I \tag{3.51}$$

$\hat{F}$ は Weyl ゲージ場の field strength で、背景に依存しない普遍的な意味を持っていることに注意する。その $\hat{F}$ が、背景 D を表す部分と、その背景の上の非可換ゲージ場の field strength $\hat{F}_\gamma$ の和に分解されているわけである。

ここまでは場の空間を $W_D \otimes \tilde{\wedge}$ としてきたが、もちろん projection σ の作用により、全ては $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \otimes \tilde{\wedge}$ を場の空間としたものに帰着する。まず $\forall a_0 = \sigma(a) \in C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \otimes \tilde{\wedge}$ に対する (3.49) の対応物は

$$\mathcal{D}_* a_0 = \tilde{\theta}^I \wedge \mathcal{D}_{*I} a_0 := \tilde{\theta}^I \wedge \sigma(\mathcal{D}_I Q(a_0)) = \tilde{\theta}^I \wedge \left(\frac{i}{\hbar}[\Phi_I, a_0]_* + \frac{i}{\hbar}[\hat{A}_{\gamma 0 I}, a_0]_* \right) \tag{3.52}$$

となる。ここで注意したいのは、$\mathcal{D}_I$ が W_D の inner derivation であるために、projection σ を作用させても $*$ 積の inner derivation で表される点である。そのため $\mathcal{D}_*$ は $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \otimes \tilde{\wedge}$ の graded derivation になっている。$\mathcal{D}_*$ を $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \otimes \tilde{\wedge}^p$ における非可換共変外微分と呼ぶ。また、同様にして (3.50) の $C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \otimes \tilde{\wedge}^p$ での対応物も projection σ により

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_*^2 a_0 &= \frac{i}{\hbar}[\hat{F}_{\gamma *}, a_0]_*, \qquad \forall a_0 \in C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A} \otimes \tilde{\wedge}, \\ \hat{F}_{\gamma *} &:= \frac{1}{2}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J \hat{F}_{\gamma * IJ} = \frac{i}{2\hbar}\tilde{\theta}^I \wedge \tilde{\theta}^J \left[\Phi_I + \hat{A}_{\gamma 0 I}, \Phi_J + \hat{A}_{\gamma 0 J}\right]_* \end{aligned} \tag{3.53}$$

となる。ここで $\hat{F}_{\gamma *}$ は非可換共変外微分 $\mathcal{D}_*$ の曲率 2-form である。

3.3.3 非可換正準座標系

これまでの議論では、$\tilde{\theta}^I$ と Φ_I（または Θ_I）の自由度は自由に選べば良く、特定されてはいなかった。ここでは、それらについてのミニマルな選択として、非可換正準座標系を導入する。

まず、次の命題を挙げる。

命題 3.10　M の各点 x_0 に対し、x_0 の近傍と center の関数の組 $\tilde{\phi}^I \in Z = C^\infty(M)[[\hbar]]$ $(I = 1 \cdots 2n)$ で、局所的に次の関係を満たすものが存在する。

$$\frac{i}{\hbar}[Q(\tilde{\phi}^I), Q(\tilde{\phi}^J)] = -J^{IJ} \quad \text{または} \quad \frac{i}{\hbar}[\tilde{\phi}^I, \tilde{\phi}^J]_* = -J^{IJ} \tag{3.54}$$

ここで、$J^{IJ} = -J^{JI}$ は定数の反対称テンソルである。

もちろん 2 つの式は等価である。これらは、右側の式を見ればわかるとおり、symplectic 多様体の Darboux の定理の量子論版（今は非可換版）である。即ち、Darboux の定理は、Poisson 括弧に関して $\{x^I, x^J\} = J^{IJ}$ を満たすような局所座標系が取れるというものだったが、それが $\hbar$ の高次を含む $*$ 積の括弧になり、選ばれる座標関数も $\hbar$ を含むものになったわけである[19]。但し、局所性などを正確に言うためには左の式の方が適当であ

[18] これは前節の Θ が $\Theta = \tilde{\theta}^I \wedge \Theta_I$ の場合である。
[19] この証明は [20] の定理の証明の流用である。

る。この「正準交換関係」を満たす関数 $\tilde{\phi}^I$ のことを $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\bar{\Lambda}$ における非可換正準座標系と呼ぶことにする[20]。また対応する $Q(\tilde{\phi}^I)$ は $W_D\otimes\bar{\Lambda}$ における非可換正準座標系である。これらはどちらも代数 $\mathcal{A}$ とは関係無く存在することに注意する。

この命題により存在する $\tilde{\phi}^I$ を用いて、$\tilde{\theta}^I$ と Φ_I を以下で与えることにする。

$$\tilde{\theta}^I = d\tilde{\phi}^I, \qquad \Phi_I = -J_{IJ}\tilde{\phi}^J \tag{3.55}$$

ここで J_{IJ} は $J_{IJ}J^{JK}=\delta_I^K$ により定義される逆行列を表す[21]。第1式は $\tilde{\theta}^I$ を、非可換正準座標系 $\tilde{\phi}^I$ に対する自然な 1-form の基底に取ることを意味している。もちろん両者は $\hbar$ の高次を含んでいるので、この選択は可能である。一方、第2式の Φ_I の方はその dual なベクトル場の基底 ∂_{*I} を選んだことに対応している。それは、以下の理由による。(3.54)(3.55) を用いると

$$\begin{aligned} &\tfrac{i}{\hbar}[Q(\Phi_I),Q(\Phi_J)] = J_{IJ}, && \frac{i}{\hbar}[\Phi_I,\Phi_J]_* = J_{IJ}, \\ &\tfrac{i}{\hbar}[Q(\Phi_I),Q(\tilde{\phi}^J)] = \delta_I^J, && \frac{i}{\hbar}[\Phi_I,\tilde{\phi}^J]_* = \delta_I^J \end{aligned} \tag{3.56}$$

という関係式が成り立つことがわかる。左右の式は等価であるから右側の $*$ 積の方でみると、第1行は Φ_I が $\tilde{\phi}^I$ と逆行列に当たる交換関係を持つことを意味し、第2行は、演算子 $\frac{i}{\hbar}[\Phi_I,\ ]_*$ が座標 $\tilde{\phi}^I$ に dual であることを意味する。従って、この演算は $\tilde{\phi}^I$ の偏微分に相当することになり、∂_{*I} と記すことが正当化される。同様に、$\hat{\partial}_I := \frac{i}{\hbar}[Q(\Phi_I),\ ]_*$ とおく。このことから、外微分演算子にあたるものを

$$\hat{d} = \tilde{\theta}^I\hat{\partial}_I := \tilde{\theta}^I\frac{i}{\hbar}[Q(\Phi_I),\cdot], \qquad d_* = \tilde{\theta}^I\partial_{*I} := \tilde{\theta}^I\frac{i}{\hbar}[\Phi_I,\cdot]_* \tag{3.57}$$

と定義するのは自然である。実際、(3.56) により以下の性質が導かれる。

$$\begin{aligned} &\hat{d}^2 = 0, && d_*^2 = 0, \\ &\hat{d}Q(\tilde{\phi}^I) = \tilde{\theta}^I = d\tilde{\phi}^I, && d_*\tilde{\phi}^I = \tilde{\theta}^I = d\tilde{\phi}^I \end{aligned} \tag{3.58}$$

第1行目は明らかに、$\hat{d}$ と d_* が differential であることを示している。第2行目は自然な 1-form の基底の正当性を意味している。即ち、上の (3.55) では d を用いて自然な 1-form の基底を定義したが、それが現在外微分と思っている $\hat{d}$ や d_* を用いた自然な基底に一致するということである。更に、$\hbar\to 0$ の極限では $\hat{d}$ と d_* は通常の d に帰着するため、これらは外微分 d の $\hbar$ による変形と解釈される。

ここまで来ると、以下の関係から、$\tilde{\phi}^I$ の意味もより明らかになる。

$$\Omega_0 = -\frac{1}{2}\omega_{ij}\theta^i\wedge\theta^j = \frac{1}{2}J_{IJ}d\tilde{\phi}^I|_{\hbar=0}\wedge d\tilde{\phi}^J|_{\hbar=0} \tag{3.59}$$

即ち、$\hbar\to 0$ 極限をとるとこの座標系で symplectic form が標準形になるということから、$\tilde{\phi}^I$ は正に M 上の局所的 Darboux 座標関数 x^I の $\hbar$ による補正に他ならないことを意味している。つまり $\tilde{\phi}^I = x^I + \mathcal{O}(\hbar)$。これに伴い、(3.58) により $\tilde{\theta}^I = d\tilde{\phi}^I$ は T^*M の自然な 1-form 基底 dx^I の $\hbar$ による補正であり、$\hat{\partial}_I$ もその dual な

[20](3.54) は $Sp(n)$ 変換の下で不変であることに注意。下の (3.55)(3.56) も同様である。

[21]第2の式は Θ_J を $d\tilde{\phi}^I = -J^{IJ}\Theta_J$ と与えるのと等価である。

基底であることになる。まとめると、われわれの選択した非可換正準座標系とその上の微分代数は、symplectic 多様体 M の正準座標系を $\hbar$ で変形した、$M[[\hbar]]$ における正準座標形とその上の自然な微分代数になっているわけである。

そもそも我々は、まず背景 D を固定し、それに応じて $*$ 積を持つ代数 $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde{\Lambda}$ を場の空間と考えた。$\tilde{\phi}^I$ は D を与えれば決まるものであるから、背景 D または γ_T の情報は今や $\tilde{\phi}^I$ が担っている。これに対し、$\tilde{\theta}^I$ や Φ_I を $\tilde{\phi}^I$ で表すところがミニマルな選択と言った部分である。

3.3.4 非可換ゲージ場の非可換正準座標系での表現

§§3.3.3 の非可換正準座標系では、(3.49),(3.52) は以下のようになる。

$$\mathcal{D}a=\hat{d}a+\frac{i}{\hbar}[Q(\hat{A}_{\gamma 0}),a],\qquad \mathcal{D}_*a_0=d_*a_0+\frac{i}{\hbar}[\hat{A}_{\gamma 0},a_0]_* \tag{3.60}$$

この表式から明らかなように、$Q(\hat{A}_{\gamma 0}):=\tilde{\theta}^IQ(\hat{A}_{\gamma 0I})$ を $W_D\otimes\tilde{\Lambda}$ における非可換ゲージ場、$\hat{A}_{\gamma 0}:=\tilde{\theta}^I\hat{A}_{\gamma 0I}$ を $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde{\Lambda}$ における非可換ゲージ場と同定するのは自然である。それぞれの曲率 $\hat{F}_\gamma$ (3.50) と $\hat{F}_{\gamma *}$ (3.53) もこの座標系では

$$\begin{aligned}\hat{F}_\gamma &= \frac{1}{2}\tilde{\theta}^I\wedge\tilde{\theta}^J\left(\hat{\partial}_IQ(\hat{A}_{\gamma 0J})-\hat{\partial}_JQ(\hat{A}_{\gamma 0I})-i[Q(\hat{A}_{\gamma 0I}),Q(\hat{A}_{\gamma 0J})]+J_{IJ}\right)=F_\gamma+\frac{1}{2}J_{IJ}\tilde{\theta}^I\wedge\tilde{\theta}^J,\\ \hat{F}_{\gamma *} &:= \frac{1}{2}\tilde{\theta}^I\wedge\tilde{\theta}^J\left(\partial_{*I}\hat{A}_{\gamma 0J}-\partial_{*J}\hat{A}_{\gamma I}-i[\hat{A}_{\gamma 0I},\hat{A}_{\gamma 0J}]_*+J_{IJ}\right)=F_{\gamma *}+\frac{1}{2}J_{IJ}\tilde{\theta}^I\wedge\tilde{\theta}^J\end{aligned} \tag{3.61}$$

と表される。ここで、F_γ と $F_{\gamma *}$ はそれぞれ今の $\mathcal{D}$、$\mathcal{D}_*$ の 2 回の作用で得られる非可換ゲージ場 $Q(\hat{A}_{\gamma 0})$ と $\hat{A}_{\gamma 0}$ の field strength のことである。また、残りの定数項は背景からの寄与で、定数係数であるから $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}\otimes\tilde{\Lambda}$ においても center に属することに注意する。同様に、(3.51)(3.59) から

$$\hat{F}=F_\gamma+\Omega-\frac{1}{2}J_{IJ}\tilde{\theta}^I\wedge\tilde{\theta}^J \tag{3.62}$$

が得られる。この表式は D-brane 有効理論の Dirac-Born-Infeld 作用に現れる $F+B+g$ の組み合わせを彷彿とさせる。ここで、F は D-brane 上のゲージ場の field strength、B は NSNS 2-form で g は D-brane に誘導された metric であるが、我々の場合は、F_γ は非可換ゲージ場の field strength、Ω は $*$ 積を定める背景の Weyl 曲率 2-form で最後の項は $\hbar$ で変形された非可換正準座標系での symplectic 2-form である。それらの組み合わせが Weyl ゲージ場の field strength $\hat{F}$ としてまとまるという普遍的な意味を持っている。

非可換ゲージ変換 A_D を与える元を (3.35) のように $V\in W_D$ とおき、この座標系での非可換ゲージ場の変換性を求めよう。まずは非可換正準座標系に限らず一般の $W_D\otimes\tilde{\Lambda}$ から出発する。このとき $\hat{A}_\gamma$ は center の不定性を除いて共変に変換した。

$$\hat{A}'_\gamma=V^{-1}\circ\hat{A}_\gamma\circ V+C,\quad C=C_A-C_\gamma-C_{A'}+C_{\gamma'} \tag{3.63}$$

この centrer C を consistency から固定する。固定した $\tilde{\theta}^I$ に対し、D を (3.63) の I 成分に作用させ、(3.47) を用いると、

$$D\hat{A}'_{\gamma I}=\Theta_I+dC_I \tag{3.64}$$

という変換後の $\hat{A}'_{\gamma I}$ に対する関係式が得られる。これは、非可換ゲージ変換の下で (3.47) は exact な center だけならずれても良いことを表している。この不定性に対し、変換後も $\tilde{\theta}^I$ が基底として選べるためには

$$dC_I = 0 \quad \therefore C_I = \text{const.} \tag{3.65}$$

でなければならない。従って、特に非可換性準座標系では、(3.63) は以下の通り書き直せる。

$$Q(\hat{A}'_{\gamma 0I}) = V^{-1} \circ Q(\hat{A}_{\gamma 0I}) \circ V - i\hbar V^{-1} \circ \hat{\partial}_I V + C_I, \;\; C_I = \text{const.} \tag{3.66}$$

これは良く知っているゲージ変換の下でのゲージ場の変換性と同じ形をしている。$(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ での $\hat{A}_{\gamma 0I}$ の変換性も同様である。

$$\hat{A}'_{\gamma 0I} = V_0^{-1} * \hat{A}_{\gamma 0I} * V_0 - i\hbar V_0^{-1} * \partial_{*I} V_0 + C_I, \quad C_I = \text{const.} \tag{3.67}$$

C_I は定数であるため $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ においても center になっていることに注意する。これにより C は $\hat{A}_{\gamma 0}$ の不定性に属する。このような定数の不定性は通常のゲージ場にも常にある。

非可換ゲージ変換の下での field strength (3.61) の変換性も C_I が定数より

$$\hat{F}'_{\gamma IJ} = V^{-1} \circ \hat{F}_{\gamma IJ} \circ V, \qquad \hat{F}'_{\gamma * IJ} = V_0^{-1} * \hat{F}_{\gamma IJ} * V_0 \tag{3.68}$$

という良く知った共変な変換性を示す。従って $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ での非可換ゲージ不変量はトレースを用いて表すことが出来る。例えば、

$$\mathrm{Tr}\left(\hat{F}_{\gamma * IJ} * \hat{F}_{\gamma * I'J'} J_0^{II'} J_0^{JJ'}\right) \tag{3.69}$$

ここで、Tr は代数 $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ のトレースで、多様体 M 上の体積積分と $N \times N$ 行列の通常のトレースを含むようなものである[22]。このような不変量から作用汎関数を構成すれば、非可換ゲージ場の理論が物理的に定義されることになる。

しかしここでは作用汎関数を固定しないままで終わることにする。その理由は以下の通りである。今や、いろいろな非可換ゲージ理論が Weyl ゲージ理論に埋め込まれた描像が得られているのであるから、作用も 1 つの非可換ゲージ理論レベルではなく、より普遍的な見地から導くのが望ましい。つまり、まず Weyl ゲージ変換を対称性として持つ作用を求め、それを Weyl ゲージ変換のうち非可換ゲージ対称性だけを残すようなゲージ固定をすることで、固定された作用を得るという方針である。そのためには Weyl bundle のレベルでのトレースが必要であるが、実は、個々の $*$ 積の代数に対してはトレースは定義できることが示されているが、Weyl bundle に対してはよくわかっていない。ただ、もしトレースがあるとすれば、作用は

$$S \sim \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Pf}\; F) \tag{3.70}$$

とでもなるだろう。

[22] その定義は [3][4] を参照。また、上の不変量は $Sp(n)$ 不変でもあることに注意。

第4章　いくつかの応用

4.1　$*$積の例

これまで見てきたように、Weyl bundle 上の Abelian connection D 及び $*$ 積は、元の symplectic 多様体 M（とベクトルバンドル L、E）のデータと変形の moduli を与えると原理的には求めることができる。ここでは、そのプロセスがある程度実行できるような非常に簡単な場合の具体的な $*$ 積の表式を与える。

元のデータとして、定数係数の symplectic form を持つ flat な多様体 M をとる。つまり、L については $\Gamma_{ij}=0$ かつ ω_{ij} が定数とし、更に frame $\theta^i={\theta^i}_\mu dx^\mu$ は係数 ${\theta^i}_\mu$ が定数の場合を考える。このとき、Ω_0 の成分 Ω_{0ij} も定数になる。また $\mathcal{A}$ については $N=1$ の $U(1)$ で、曲率 2-form R^E の成分は定数 ${R^E}_{ij}\in\mathbb{C}$、つまり constant field strength にする。最後に、moduli については Ω_1 の成分は Ω_0 に合わせて定数にとる。但し $\hbar$ のべきは一つ以上任意に含むので、あらかじめ $\hbar$ を出しておいて

$$\Omega_1=\frac{1}{2}\hbar\Omega_{1ij}\theta^i\wedge\theta^j,\quad \Omega_{1ij}\in\mathbb{C}[[\hbar]] \tag{4.1}$$

とする。更に、μ は y に関して 2 次式でその係数は定数とする[1]。

$$\mu=\frac{1}{2}\hbar\mu_{ij}y^iy^j,\quad \mu_{ij}\in\mathbb{C}[[\hbar]] \tag{4.2}$$

以上まとめると、与える背景のパラメーターが全て定数の場合を考えることになる。これは局所 Darboux 座標でのみ見て、bundle の局所自明化をしているのと同じである。

このとき、r を決める方程式は (2.61) から

$$\begin{aligned} r_s &= \hbar\mu_{ij}y^i\theta^j,\\ r_a &= \frac{1}{2}\left(-i\hbar R_E-\hbar\Omega_1+\hbar^2\mu\omega^{-1}\mu\right)_{ij}y^i\theta^j+\delta^{-1}\left(\hbar\mu_{ij}\omega^{ik}\theta^j\wedge\frac{\partial}{\partial y^k}r_a+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y^i}r_a\wedge\omega^{ij}\frac{\partial}{\partial y^j}r_a\right) \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。ここで、i,j の足に関する行列の積で一部表示している。第二式の漸化式を解くことはこの場合でも難しい。しかし、r は y の 1 次で係数が定数であることはすぐわかる。よって、

$$r=\frac{1}{2}\hbar(2\mu-iR_E-\Omega_1)_{ij}y^i\theta^j+\cdots=r^{(2)}_{ij}y^i\theta^j\qquad r^{(2)}_{ij}\in\mathbb{C}[[\hbar]] \tag{4.4}$$

とおいておく。このとき (4.3) は行列 $r^{(2)}_{ij}$ に対する行列の漸化式になるが、ここではそれを解かずに、$r^{(2)}_{ij}$ を用いて $*$ 積がどのように表されるかの方に注目する。

[1] $\mu\in W_3(L,\mathcal{A})$ より、y の 2 次なら μ も必ず $\hbar$ を含むので、あらかじめ出してある。

実は、(2.31) については一般に漸化式ではなく閉じた形で

$$
\begin{aligned}
&a = Q(a_0) \\
&= \sum_{\substack{l\geq 0, n\geq 0 \\ n=n_1+n_2+\cdots+n_{l+1}}} (\delta^{-1}\nabla)^{n_1}\delta^{-1}[\frac{i}{\hbar}r,(\delta^{-1}\nabla)^{n_2}\delta^{-1}[\frac{i}{\hbar}r,\cdots,(\delta^{-1}\nabla)^{n_l}\delta^{-1}[\frac{i}{\hbar}r,(\delta^{-1}\nabla)^{n_{l+1}}a_0]\cdots]]
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

と形式的には解くことができる。微分 ∇ が至る所に入っているために、これ以上は難しいが、今の r の場合は定数なので、この無限和が計算できる。特に、関数として座標関数 $a_0 = x^\mu$ をとると、

$$
\begin{aligned}
Q(x^\mu) &= x^\mu + \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}\right)^l \delta^{-1}[r,\delta^{-1}[r,\cdots,\delta^{-1}[r,y^i X_i{}^\mu]\cdots]] \\
&= x^\mu + y^i\left(\frac{1}{1+(\omega^{-1}r^{(2)})^T}X\right)_i^{\ \mu}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

とまとまる。ここで、i,j と μ,ν の足に関する行列の積、転置、逆を用いている。この結果が y について線形であることから、一般の関数 $f(x)$ に対しても、単にその引数 x を $Q(x)$ に置き換えれば良いこともすぐわかる。

$$
Q(f(x)) = f(Q(x)) = f\left(x^\mu + y^i\left(\frac{1}{1+(\omega^{-1}r^{(2)})^T}X\right)_i^{\ \mu}\right)
\tag{4.7}
$$

このことから、今の場合の $*$ 積は Moyal-Weyl 型であることが導かれる。即ち、$*$ 積は

$$
f(x)*g(x) = f(x)\exp\left(\frac{i}{2}\vartheta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\mu}\overrightarrow{\partial_\nu}\right)g(x), \qquad f(x),g(x)\in C^\infty(M)[[\hbar]].
\tag{4.8}
$$

という形をしている。ここで、$\vartheta^{\mu\nu}$ は

$$
\begin{aligned}
\vartheta^{\mu\nu} &:= -i(x^\mu * x^\nu - x^\nu * x^\mu) = -i\sigma([Q(x^\mu),Q(x^\nu)]) \\
&= -\hbar\left(X^T\frac{1}{1+\omega^{-1}r^{(2)}}\omega^{-1}\frac{1}{1+(\omega^{-1}r^{(2)})^T}X\right)^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

で与えられる。言い換えると、ここでは、非可換性が一つのパラメーター $\vartheta^{\mu\nu}$ で特徴付けられる場合を考えていたことになる。

この例は例 **2.16** の $Q(x^i) = x^i + y^i$ の場合から y^i の足を定数行列で回転させただけなので本質的には非自明な例とは言えないかもしれない。しかし例えば、この例で $U(1)$ から $U(N)$ に変えただけでも $r^{(2)}$ が $N\times N$ 行列になるため、$Q(x)$ や $\vartheta^{\mu\nu}$ も行列になる。すると、x^μ はもはや通常の座標関数という意味を失い、non-Abelian 的な座標関数になることが予想できる。敢えて物理の例と結びつけるならば、それは行列模型における古典解のようなものであろう。

4.2 ゲージ同値性

これまでの議論の簡単な応用として、ゲージ同値性を我々の枠組で解釈する。

まず、その背景にある事情を簡単に振り返っておこう。定数の B 場が背景にあるときの open string 理論において、D-brane 有効理論が Moyal-Weyl 積による非可換ゲージ理論になることは §1 でも述べた。その非可換性の出所を一言で言えば、string の 2 次の、B 場との相互作用項 $\sim \int B\partial X\partial X$ を worldsheet の propagator の一部と見なすところから来る。このとき string の S 行列を再現する有効理論は一般に、非可換な Dirac-Born-Infeld 作用で与えられる [8]。

$$S \sim \int \sqrt{\det(G+\hat{F})}, \quad \hat{F} = d\hat{A} - i\hat{A}*\hat{A}$$

ここで、$\hat{A}$ は非可換 $U(1)$ ゲージ場で、全ての積は Moyal-Weyl 積

$$f(x)*g(x) = f(x)\exp\left(\frac{i}{2}\vartheta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial_\mu}\overrightarrow{\partial_\nu}\right)g(x) \tag{4.10}$$

である。一方、これは通常のやり方であるが、同じ項を相互作用項のまま取り扱えば、非可換性は現れず、B 場は背景場のまま有効理論に残ってくる。これは可換な Dirac-Born-Infeld 作用で記述される。

$$S \sim \int \sqrt{\det(g+B+F)}, \quad F = dA$$

これらは物理的には違いはないはずなので、この 2 つの作用が等しくなることが期待される。すると、両者のゲージ場の間には何らかの関係式が成り立つことになる。これが俗にいう Seiberg-Witten map である。[8] ではその map を求めるために、ゲージ同値性というものを仮定した。即ち、Seiberg-Witten map を $SW : A \mapsto \hat{A}(A)$ と書いたとき、

$$\hat{A}(A) + \hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{A} = \hat{A}(A+\delta_\lambda A) \tag{4.11}$$

という関係式である。ここで、δ、$\hat{\delta}$ はそれぞれ可換、非可換での無限小ゲージ変換で、λ、$\hat{\lambda}$ はそれぞれのパラメーターである。この意味は、可換な理論の A のゲージ軌道は、(ゲージ群は異なるにせよ) 非可換な理論でも $\hat{A}(A)$ のゲージ軌道に写るべし、という要請である。図式で表すと

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "SW"] & \hat{A}' \\ A \arrow[u, "\delta_\lambda"] \arrow[r, "SW"'] & \hat{A} \arrow[u, "\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}"'] \end{tikzcd}$$

これが可換図式であるということを意味する。この図式はゲージ場に対する写像で書いたが、ゲージ同値性自体はゲージ場や物質場も含めた場の空間全体で考えるべきものである。しかしこの要請を満たす写像 SW を具体的に求めるのは難しいので、[8] では $\vartheta^{\mu\nu}$ の値が無限小だけ異なる場合の非可換ゲージ場の関係を求めた。即ち、$\vartheta^{\mu\nu}$ と $\vartheta^{\mu\nu}+\delta\vartheta^{\mu\nu}$ の 2 つの $*$ 積に対し、無限小の Seiberg-Witten map が存在し上と同様の図式が可換になるようなゲージ同値性を仮定する。このとき (4.11) は $\delta\vartheta^{\mu\nu}$ による変分形で

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\delta\hat{A} = \delta\hat{\delta}_{\hat{\lambda}}\hat{A} \tag{4.12}$$

と表せる。ここで、$\delta\hat{A}$ は $\delta\vartheta^{\mu\nu}$ に伴う非可換ゲージ場の無限小の変化を表す。そしてこの解を [8] では

$$\begin{aligned} \delta\hat{A}_\mu &= -\frac{1}{4}\delta\vartheta^{\rho\tau}\{\hat{A}_\rho, \partial_\tau\hat{A}_\mu + \hat{F}_{\tau\mu}\} \\ \delta\hat{\lambda} &= \frac{1}{4}\delta\vartheta^{\rho\tau}\{\partial_\rho\hat{\lambda}, \hat{A}_\tau\} \end{aligned} \tag{4.13}$$

で与えた。更に、有限な写像 SW つまり元々の可換なゲージ場と非可換ゲージ場の関係は、これを $\delta\theta^{\mu\nu}$ について積分することにより得られるとした。なお、この結果を用いると2つの Dirac-Born-Infeld 作用が等しいことが示せる。

これに対し我々は以前、上の導出により得られる Seiberg-Witten map には、実は2種類の不定性があることを指摘した [2]。その1つ目は (4.13) 自身が (4.12) の解としては一般解ではなく

$$\begin{aligned}\delta\hat{A} &= -\frac{1}{4}\delta\vartheta^{\rho\tau}\{\hat{A}_\rho, \partial_\tau\hat{A}_\mu + \hat{F}_{\tau\mu}\} + \alpha\delta\vartheta^{\rho\tau}\hat{D}_\mu\hat{F}_{\rho\tau} + \beta\delta\vartheta^{\rho\tau}\hat{D}_\mu[\hat{A}_\rho, \hat{A}_\tau] \\ \delta\hat{\lambda} &= \frac{1}{4}\delta\vartheta^{\rho\tau}\{\partial_\rho\hat{\lambda}, \hat{A}_\tau\} + 2\beta\delta\vartheta^{\rho\tau}[\partial_\rho\hat{\lambda}, \hat{A}_\tau]\end{aligned} \tag{4.14}$$

が解として許されるところである。ここで、$\hat{D}_\mu$ は非可換ゲージ変換の共変微分で、α、β は任意定数である。つまり α、β の項の不定性がある。しかしこれらは（場に依存したパラメーターによる）非可換ゲージ変換の形をしているため、ある意味自然な不定性と言える。それは、そもそもゲージ同値性はゲージ場同士の写像ではなく、ゲージ軌道同士の写像であるからである。即ち、Seiberg-Witten map は本当は、ゲージ変換で割った同値類に対する写像 $SW : [A] \to [\hat{A}]$ で定義されるべきもので、特別な代表元の関係として写像を定義するならば、常にこの不定性は存在する。

2つ目の不定性は無限小の $\delta\vartheta^{\mu\nu}$ のシフトを2回行う時に生じる。それぞれを $\delta\vartheta_1^{\mu\nu}$、$\delta\vartheta_2^{\mu\nu}$ とおくと、どちらを先に行っても $\vartheta^{\mu\nu}$ は同じ $\vartheta^{\mu\nu} + \delta\vartheta_1^{\mu\nu} + \delta\vartheta_2^{\mu\nu}$ に変化するが、対応する場の変分の方は実は順序に依っている。それは実際に計算により

$$[\delta_1, \delta_2]\hat{A}_\mu \neq 0 \tag{4.15}$$

が示せるからである。ここで δ_i は $\delta\vartheta_i^{\mu\nu}$ に伴う場の変分であり、右辺は先程とは違い非可換ゲージ変換の形にはまとまらない複雑な形をしている[2]。従って、どちらの無限小のシフトを先に行うかによって、一般に異なるゲージ軌道に写ることになる。その結果、無限小の変分を積分して有限の写像を求める際にも、$\vartheta^{\mu\nu}$ の値の空間のどの経路を通るかにより結果が異なる、つまり積分の経路依存性が生じる。

$$[\hat{A}_\mu] = \int_{\text{path}} [\delta\hat{A}_\mu] \tag{4.16}$$

但しこれらの不定性は、結果的には Dirac-Born-Infeld 作用が等しいという [8] の結論には抵触しない。それはこの作用自体が極めて粗い近似で導かれている有効作用であるため、その近似では不定性も落とされるからである。

以上の背景を踏まえ、ここでは $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ と $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *')$ という2つの $*$ 積を持つ代数の上の非可換ゲージ理論の関係がゲージ同値性を持つことを確かめ、上の不定性との対応も示す。

§3.1 で述べたように、代数 $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ は flat section W_D に同型なので、こちらで考える。このとき2つの $*$ 積の代数は、2つの flat sections W_D、$W_{D'}$ に対応するので、上の図式に相当するものが以下の

[2]この (4.15) の形を見ると、何らかの Lie 代数的な構造があるように思われてくる。実はその構造の幾何学的原因を探るために、[1] の研究を始めた。

通り書ける[3]。

$$\begin{array}{ccc} W_D & \xrightarrow{A} & W_{D'} \\ {\scriptstyle A_D}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle A_{D'}} \\ W_D & \xrightarrow[A]{} & W_{D'} \end{array}$$

ここで、左側の2つは同じ flat section W_D で、縦の写像は W_D の非可換ゲージ変換 A_D を表している。右側の2つは W_D とは別の flat section $W_{D'}$ で、縦の写像は $W_{D'}$ の非可換ゲージ変換 $A_{D'}$ である。一方、横の写像は共に、$W(L,\mathcal{A})$ の中の W_D から $W_{D'}$ への Weyl ゲージ変換 A で、§§3.1 によると $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ のレベルでは $*$ 積の同値を表している。この図式は $A_{D'}=AA_DA^{-1}$ であれば可換になるが、それは常に可能である。なぜなら、これらの写像が全て $W(L,\mathcal{A})$ で見れば Weyl ゲージ変換に過ぎないことに注意すれば、この関係 $A_{D'}=AA_DA^{-1}$ は単に Weyl ゲージ変換群の群の規則に他ならないからである。よって可換図式の場合を考えると、この図式は明らかにゲージ同値性を表している。それを具体的なゲージパラメーター同士の関係で見よう。§3.1 と同じく、非可換ゲージ変換 A_D を与える群の元を $V\in W_D$ [4]、Weyl ゲージ変換 A を与えるものを $U\in W^+$ とおくと、$W_{D'}$ での変換 $A_{D'}$ は

$$A_{D'}a := AA_DA^{-1}a=(U^{-1}\circ V\circ U)^{-1}\circ a\circ(U^{-1}\circ V\circ U) \tag{4.17}$$

という作用になる。$D'V'=U^{-1}\circ(DV')\circ U=0$ より、これは確かに $W_{D'}$ 上の $V'=U^{-1}\circ V\circ U\in W_{D'}$ という元で与えられる非可換ゲージ変換 $A_{D'}$ を表している。以上により、2つの同値な $*$ 積の代数の上の非可換ゲージ変換同士のゲージ同値性とは、我々の観点では Weyl ゲージ変換に他ならないことがわかる。また、もし2つの Weyl ゲージ変換 A、$\tilde{A}$ が同じ $W_{D'}$ への写像だとすると、必ずある $A_{D'}$ が存在して $\tilde{A}=A_{D'}A$ と書ける。言い換えると、U と $\tilde{U}=V\circ U$ は共に同じ代数のゲージ同値性を表しており、ゲージ軌道同士の写像としては同一である。

今は fiberwise な自己同型で話をしたが、より一般には、diffeomorphism を含む自己同型の場合でも全く同様の可換図式が成り立つ。このときは、その図式は2つの flat section の自己同型の同値性を表すことになる。

さて、横方向の写像を2回行うことを考える。それぞれを A_1（対応して $U_1\in W^+$）、A_2（同じく $U_2\in W^+$）とおく。一般に Weyl ゲージ変換は非可換 $U_1\circ U_2\neq U_2\circ U_1$ であるから（これは単に $\circ$ 積の非可換性の帰結）、写像の合成の意味で $A_1A_2\neq A_2A_1$ となる。従って、W_D は2つの写像 A_1A_2 と A_2A_1 では一般に異なる flat section に写る。もちろん同じ $W_{D''}$ に写ったとすると、上と同様に、その違いは必ず $W_{D''}$ の非可換ゲージ変換 $A_{D''}$ 分になる。

ここで Seiberg-Witten map との比較をしておこう。まず我々の W_D のうち、1つの定数パラメーター $\theta^{\mu\nu}$ で非可換性が特徴付けられるような非常に特別な場合（§§4.1 の例を参照）が D-brane に現れる非可換性である。但し、非可換性は元々複数の moduli で指定されているため、同じ $\theta^{\mu\nu}$ を与えるような異なる W_D はいくつもありうることに注意する。そのような2つの代数のうち、特に無限小だけ $\theta^{\mu\nu}$ の値が異なる場合が一番

[3] もちろん 0-form だけでなく ΛW_D でも良い。
[4] もちろん局所的に W_D の元となるよう center を固定している。

上の図式である。よって、変換 A は $\vartheta^{\mu\nu} \mapsto \vartheta'^{\mu\nu} = \vartheta^{\mu\nu} + \delta\vartheta^{\mu\nu}$ という変換を生成する U のときに対応する。U を固定すれば各元の写像としては不定性はないが、ゲージ軌道の写像の意味では上で述べたように、非可換ゲージ変換分の不定性がある。これは Seiberg-Witten map の第1の不定性と全く同じ事情である。このような定数パラメーター $\vartheta^{\mu\nu}$ のクラスに限った場合、2回の写像の下で一般には $A_1A_2 \neq A_2A_1$ であったとしても、写った先の $\vartheta''^{\mu\nu}$ の値は等しくなる。よって、写る先の $*$ 積の代数は等しいが、$A_1A_2 \neq A_2A_1$ であるためゲージ軌道は異なるということが起き得る。これが Seiberg-Witten map の第2の不定性の経路依存性と対応している。以上のように、D-brane におけるゲージ同値性の Weyl ゲージ変換としての解釈が成される。

これで議論は尽きているが、Seiberg-Witten map に合わせて今の可換図式での非可換ゲージ場同士の関係を求めておこう。§§3.3 の非可換ゲージ場の定義に従い、上の可換図式（の形式の代数 $W_D \otimes \bar{\Lambda}$ の場合）に当てはめて、(3.35)、(3.48) を用いると

$$\tilde{\theta}'^{I'}\hat{A}'_{\gamma 0 I'} = \tilde{\theta}^I\sigma\left(U^{-1}\circ Q(\hat{A}_{\gamma 0 I})\circ U\right) - \frac{1}{\hbar}\tilde{\theta}^I\sigma\left(U^{-1}\circ Q(\Phi_I)\circ U\right) + \frac{1}{\hbar}\tilde{\theta}^I\Phi_I + C \tag{4.18}$$

という関係が得られる。これが Seiberg-Witten map の対応物である。但し、W_D と $W_{D'}$ が異なるため、§§3.3 の構成法に従えば、基底 $\tilde{\theta}^I$、$\tilde{\theta}'^{I'}$ は一般に異なっていることに注意する。

但し、我々の枠組に、D-brane の非可換性が正確にはどのように埋め込まれているかが明らかではないため、可換なゲージ場との関係までは現状ではよくわからない。しかし、Weyl ゲージ変換 A ではなく diffeomorphism を含んだ自己同型 A_f の場合で、かつ2つの W_D、$W_{D'}$ を与える背景として $U(1)$ 部分の field strength が必ず異なる場合が、真の Seiberg-Witten map になると思われる[5]。但しその場合は非可換ゲージ場の関係も (4.18) より複雑になる。

[5]これは [21] による結果を考慮している

第5章　Conclusion and Discussion

本稿では、任意の symplectic 多様体 M から、変形量子化の手法を非可換変形として解釈することにより非可換空間を定義し、またその非可換空間上の非可換ゲージ理論の構成を行った。ここで扱った非可換空間は $*$ 積で特徴付けられるものであったが、その非可換代数 $(C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A},*)$ を得るために、我々は Fedosov による変形量子化の手法を用いた。まず §2.3 では、fiberwise に Moyal-Weyl 積を持つような Weyl bundle $W(L,\mathcal{A})$ の概念とその上の Weyl connection $\mathcal{D}$ を導入した。そのうち特に Abelian connections D の場合には、D に関する flat section の代数 W_D との同型が成り立つため、$C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ における $*$ 積が得られた。次に §3.1 では Weyl bundle の自己同型、特に Weyl ゲージ変換について議論した。その結果、一般の自己同型は異なる W_D 達の同型を引き起こし、それは $*$ 積の同値関係を与えていることがわかった。そして特に、$*$ 積を保存するような W_D の自己同型が非可換ゲージ変換を含んでいることが結論された。従って、様々な非可換空間は Weyl ゲージ変換により結びついており、その上の非可換ゲージ変換も Weyl ゲージ変換の一部であることから、両者が Weyl ゲージ理論として統一的に記述されるという描像に至った。それを踏まえ、§3.2 では Weyl ゲージ変換に付随する Weyl ゲージ場 $\hat{A}$ と、その適当な制限で得られる非可換ゲージ場 $\hat{A}_\gamma$ を与えた。これはもちろん $C^\infty(M)[[\hbar]]\otimes\mathcal{A}$ 上の非可換ゲージ場 $\hat{A}_{\gamma 0}$ に対応している。以上の構成法から、得られた非可換ゲージ理論というのは全て、普遍的な Weyl ゲージ理論のあるゲージ固定された理論と見なすことができる。最後に §4.1 では応用として、定数で特徴付けられるような簡単な $*$ 積の具体的な表式を与えた。また、いわゆる Seiberg-Witten map の幾何学的な解釈、つまりゲージ同値性というのは Weyl ゲージ変換性に他ならないということを示した。

以下ではこれからの課題と展望について簡単に述べる。

§§3.2.1 では Weyl ゲージ理論の作用汎関数については詳しく触れなかった。それは既に述べたように、Weyl bundle の代数に関するトレースが定義されていないからであった。適当なトレースが定義されたとすると、作用は $\mathrm{Tr}[(\hat{F}_A)^n]=\mathrm{Tr}[\mathrm{Pf}\hat{F}_A]$ とでも表されると予想される。そして非可換ゲージ理論の作用も、この作用から非可換ゲージ対称性を残すようなゲージ固定として得られるであろう。非可換空間とその上のゲージ理論が同じ場の異なる側面として統一されているという我々の描像は、行列模型による非可換ゲージ理論の記述に良く似ている。両者の正確な関係がわかれば、行列模型の拡張にも役立つかもしれない。

本稿では $W(L,\mathcal{A})\otimes\Lambda$ の自己同型 A_f のうち、fiberwise でかつ symplectic lifting を固定した自己同型を Weyl ゲージ変換と呼び、それに注目してきた。それは非可換ゲージ理論に我々の興味があったからである。その場合は、元の多様体 M のは全く変更せず、但し $\hbar$ による補正を受けたような背景の上の理論として見え

た。もし diffeomorphism を含むような自己同型 A_f 全体を考えると、座標変換とその補正自体も力学的な変換に加わることになる。即ち、非可換重力を含むような非可換ゲージ理論になると思われる。このときは §3.3 でやったような局所的で成分表示に強く依存した定式化では明らかに不充分であろう。これに対し、制限した $W_D \otimes \bar{\Lambda}$ ではなく $_{\Lambda}W_D$ を場の空間とする方法の方が有効である。この代数は実は非可換空間の関数環に通常付随している微分代数ではなく、その微分の概念を少し拡張したものになっている。これを信じれば、非可換微分幾何としても新しい可能性を提示出来るかもしれない。

最も楽観的には、我々の構成したゲージ理論は、定数でない一般の B 場と、一般の曲がった背景の中の N 枚の重なった D(2n)-brane を記述しているように思える。その際、変形パラメーター $\hbar$ は string の長さの2乗の α' と同定される。つまり、string 的な補正により非可換性が現れるという描像である。D-brane の位置を定める Higgs 場に相当する $U(N)$ adjoint matter の空間が、我々が場の空間と呼んでいた $(C^\infty(M)[[\hbar]] \otimes \mathcal{A}, *)$ である。フェルミオンも同様に含めることができる。更に diffeomorphism も含めると、我々の field strength (3.62) は非可換な Dirac-Born-Infeld 作用 (§3.3) の組み合わせになり、普遍的な意味を持つこともありうる。しかし、実際に string 理論における非可換ゲージ理論を我々の枠組に埋め込むことは難しい。それは、1つには string で知られている例が定数背景の簡単な場合しかないためである。もう1つは、我々の枠組に metric がどう入るかが明らかではない点である。もしこれまでの構成を何も変更せずに metric を入れるとすると、Riemann 多様体 N の cotangent bundle T^*N を symplectic 多様体 M と見なすことが考えられる。このとき string の非可換性を再現するような Abelian connection が実際存在する [22]。しかしその物理的解釈はあまり明らかではない。別の方法としては、我々が $\mathcal{A}$ や L の拡張をしたように Weyl bundle による構成法の本質的な部分は変えずに metric を入れることが考えられる。§2.4 で述べた super star product はその候補である。またごく最近、Poisson 多様体でも Fedosov 流の構成で変形量子化が可能であることが示された。このように、より物理的に現実的な状況設定に拡張することは今後の重要な課題の一つである。

謝辞

この博士論文は同じ研究室で同期の岸本氏との共同研究が基になっています。私が持っていた漠然としたアイデアが論文という形になったのも、岸本氏と繰り返した議論の賜物です。ここに感謝致します。また、いろいろな議論に付き合っていただいたり、日々お世話になった素粒子論研究室の皆さんに感謝致します。

付 録A

A.1 $W \otimes \bigwedge$ の derivation

ここでは、演算子 $\frac{i}{\hbar}[H,\ ]$ が $W \otimes \bigwedge$ の derivation であるための H に対する条件を求める。

まず、交換子を $\hbar$ に関して展開したときの 0 次は $\mathcal{A}$ の Lie 括弧 $\frac{i}{\hbar}[H,\ ]_{\mathcal{A}}$ であるが、この Lie 括弧で $\frac{i}{\hbar}[H,a]_{\mathcal{A}} \in W(L,\mathcal{A}) \otimes \bigwedge$ が成り立てさえすれば、それより高次では必ず $\hbar$ が交換子から出てくるので、常に成り立つことに注意する。そうするとまず、Lie 括弧が 0 になるような、$\mathcal{A}$ の center を係数に持つものは交換子の 0 次が効かないため任意で良いので、集合 $W(L,Z)$ が許される。即ち、center 係数で y と $\hbar$ の形式的べき級数の全体である。一方、center 以外も係数に持つとすると、交換子の 0 次に $\frac{i}{\hbar}$ を掛けたものが $\hbar$ の負べきを含まないためには、H が必ず $\hbar$ を含まねばならない。よって和集合 $\hbar W(L,\mathcal{A}) \cup W(L,Z)$ が許されることになる。これらの共通部分は $\hbar$ を含むような $W(L,Z)$ の元から成るので、結局、

$$W'(L,\mathcal{A}) := \hbar W(L,\mathcal{A}) \oplus S(L^*) \ \subset\ W(L,\mathcal{A}) \tag{A.1}$$

が derivatoion として許される H の全体である。ここで、$S(L^*)$ は y の $C^\infty(M)$ 係数多項式の全体を表す。つまり

$$\begin{aligned}
S^{(p)}(L^*) &:= \{H = \frac{1}{p!}H_{i_1,\cdots i_p}y_1^i\cdots y_p^i \mid H_{i_1\cdots i_p} \in C^\infty(M)\} \\
S(L^*) &:= \bigoplus_{p=0}^{\infty} S^{(p)}(L^*), \qquad S_k(L^*) := \bigoplus_{p=k}^{\infty} S^{(p)}(L^*)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

などとしている。但し、これらは center の不定性を常に含んでいることに注意する。特に次数 0 の $S^0(L^*)$ の元は全て center である。この結果を模式的に書くと

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\hbar}[W'(L,\mathcal{A}),\ ] &= i[W(L,\mathcal{A}),\ ] + \frac{i}{\hbar}[S(L^*),\ ] \\
&= i[W(L,\mathcal{A}),\ ]_{\mathcal{A}} + \{S(L^*),\ \}_{\omega} + \mathcal{O}(\hbar)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

ここで $\mathcal{O}(\hbar)$ は交換子に関してのものである。第一項は Lie 括弧、第二項は Poisson 括弧であるが、共に 0 次から始まっている。

集合 $W'(L,\mathcal{A})$ は別の表し方もできる。つまり、

$$W'(L,\mathcal{A}) := \hbar W(L,\mathcal{A}/Z) \oplus W(L,Z) \ \subset\ W(L,\mathcal{A}) \tag{A.4}$$

第二項は center 係数の Weyl bundle の section、つまり $\mathcal{A}$ の拡張を行わないときの Weyl bundle であり、第一項は center 以外の係数、つまり $su(N)$ 係数の Weyl bundle と解釈できる。

関連図書

[1] T. Asakawa and I. Kishimoto, *"Noncommutative Gauge Theories from Deformation Quantization,"* *Nucl. Phys.* **B591** (2000) 611-635. hep-th/0002138.

[2] T. Asakawa and I. Kishimoto, *"Comments on Gauge Equivalence in Noncommutative Geometry,"* *JHEP* **9911** (1999) 024. hep-th/9909139.

[3] B.V. Fedosov, *"A simple geometrical construction of deformation quantization,"* J. Diff. Geom. **40** (1994) 213-238.

[4] B.V. Fedosov, *"Deformation quantization and index theory,"* Berlin, Germany: Akademie-Verl. (1996) 325 p. (Mathematical topics: 9).

[5] E. Witten, *"Noncommutative Geometry And String Field Theory,"* Nucl. Phys. **B268**, 253 (1986).

[6] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, *"Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori,"* *JHEP* **9802** (1998) 003. hep-th/9711162.

[7] M. R. Douglas and C. Hull, *"D-branes and the Noncommutative Torus,"* *JHEP* **9802** (1998) 008. hep-th/9711165.

[8] N. Seiberg and E. Witten, *"String Theory and Noncommutative Geometry,"* *JHEP* **9909** (1999) 032. hep-th/9908142.

[9] H. Garcia-Compean, J. F. Plebanski and M. Przanowski, *"The Geometry of Deformation Quantization and Self-Dual Gravity,"* hep-th/9710154.
H. Garcia-Compean, *"On the Deformation Quantization Description of Matrix Compactifications,"* *Nucl. Phys.* **B541** (1999) 651-670. hep-th/9804188.
M. R. Douglas, *"Two Lectures on D-Geometry and Noncommutative Geometry,"* hep-th/9901146.
V. Schomerus, *"D-branes and Deformation Quantization,"* *JHEP* **9906** (1999) 030. hep-th/9903205.
I. Ya. Aref'eva and I. V. Volovich, *"Noncommutative Gauge Fields on Poisson Manifolds,"* hep-th/9907114.
H. Garcia-Compean and J. F. Plebanski, *"D-branes on Group Manifolds and Deformation Quantization,"* hep-th/9907183.
L.Cornalba and R. Schiappa, *"Matrix Theory Star Products from the Born-Infeld Action,"*

hep-th/9907211.
A. Yu. Alekseev, A. Recknagel and V. Schomerus, *"Non-commutative World-volume Geometries: Branes on SU(2) and Fuzzy Spheres,"* *JHEP* **9909**(1999)023. hep-th/9908040.
M. Vasiliev, *"Higher Spin Gauge Theories: Star-Product and AdS Space,"* hep-th/9910096.

[10] A. Connes, *"Noncommutative Geometry"*, Academic Press (1994).

[11] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, *"Deformation Theory and Quantization. I. Deformation of Symplectic Structures,"*, Ann. Phys. **111** (1978) 61-110. *"Deformation Theory and Quantization. II. Physical Applications,"* Ann. Phys. **111** (1978), 111-151.

[12] M. De Wilde and P. Lecomte, *"Existence of star-products and of formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds,"* *Lett. Math. Phys.* **7** (1983) 487-496.
H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka *"Weyl manifolds and deformation quantization,"* Advances in *Math.* **85** (1991), 224-255.

[13] M. Kontsevich, *"Deformation quantization of Poisson manifolds, I,"* q-alg/9709040.

[14] A. S. Cattaneo and G. Felder, *"A path integral approach to the Kontsevich quantization formula,"* math.QA/9902090.

[15] I. Gelfand,V. Retakh and M. Shubin, *"Fedosov Manifolds,"* dg-ga/9707024.

[16] M. Bertelson, M.Cahen and S. Gutt, *"Equivalence of star products,"* Class. Quantum Grav. **14** (1997) A93-A107.

[17] M. Bordemann, *"On the deformation quantization of super-Poisson brackets,"* q-alg/9605038.
"The deformation quantization of certain super-Poisson brackets and BRST cohomology," math.QA/0003218.

[18] C. Emmrich and A. Weinstein, *"The differential geometry of Fedosov's quantization,"* hep-th/9311094.

[19] A. Weinstein and P. Xu *"Hochschild cohomology and characteristic classes for star-products,"* q-alg/9709043.

[20] 大森 英樹, 「一般力学系と場の幾何学」裳華房 (1991).

[21] L. Cornalba, *"D-brane Physics and Noncommutative Yang-Mills Theory,"* hep-th/9909081.
N. Ishibashi, *"A Relation between Commutative and Noncommutative Descriptions of D-branes,"* hep-th/9909176.
K. Okuyama, *"A Path Integral Representation of the Map between Commutative and Noncommutative Gauge Fields,"* hep-th/9910138.

C-S Chu, P-M Ho and M. Li, *"Matrix Theory in a Constant C Field Background,"* hep-th/9911153.

B. Jurco and P. Schupp, *"Noncommutative Yang-Mills from equivalence of star products,* hep-th/0001032.

J. Madore, S. Schraml, P. Schupp and J. Wess, *"Gauge Theory on Noncommutative Spaces,* hep-th/0001203.

[22] 浅川 嗣彦，talk at 日本物理学会第 55 回年次大会 (2000).